## 2. Solitäre Wellen in der Hydrodynamik des 19. Jahrhunderts

Der Moment, als der schottische Ingenieur JOHN SCOTT RUSSELL (1808-1882) [Kurzbiographie] im August 1834 eine solitäre Wasserwelle in einem Kanal entdeckte, gilt als die Geburtsstunde der Solitonentheorie. Denn RUSSELL erkannte, daß sich dieses Phänomen wesentlich von periodischen Wellen unterschied. Er erforschte und beschrieb es sehr ausführlich. RUSSELL galt bislang als der Erste, der die solitäre Welle entdeckte. Es ist jedoch davon auszugehen, daß die solitäre Welle - oder Einzelwelle - in Kanälen oder Flüssen zu jener Zeit kein ganz unbekanntes Phänomen war, nur fehlte eine explizite Beschreibung bis dato[1]. RUSSELL selbst berichtete [Russell 1840a] über Erfahrungen mit der solitären Welle, die in Holland und in den Vereinigten Staaten in der Kanal- bzw. Flußschiffahrt zur Überwindung von Untiefen benutzt wurde. Ferner sei in der Flußschiffahrt beobachtet worden, daß der beim Treideln eines Kahns zu überwindende Widerstand ab einer gewissen Geschwindigkeit unter Umständen abnehmen konnte. Dieser Effekt wurde mit dem Vorhandensein einer durch den Kahn erzeugten, deutlich sichtbaren Einzelwelle erklärt [Fairbairn 1831], [Gibbes 1835] und von RUSSELL später ausführlich beschrieben. Daß sich der Widerstand eines in einem Kanal gezogenen Kahnes nicht nach dem Newtonschen Gesetz, d.h. quadratisch zur Geschwindigkeit des Kahnes, entwickelt, war schon 1767 von BORDA herausgefunden worden [Borda 1767]. Er schloß daraus, daß es zumindest was die Newtonsche Formel angehe, nutzlos und sogar gefährlich sei, die Theorie der Physik auf die Kunst des Schiffbaus anzuwenden [Bön., Sch. 1984]. Die Tatsache, daß sich der Wasserwiderstand nicht nach Newtons Gesetz richtete, war ein in der Wissenschaft viel diskutiertes Problem [Creighton 1817]. Und gerade dieses Problem sollte im Jahre 1834 RUSSELL zu seiner berühmt gewordenen Entdeckung führen.

Die Frage, wovon der Wasserwiderstand von Schiffen abhängt und wie er minimiert werden könnte, wurde schon im 18. Jahrhunderts gestellt. Die Antwortet darauf wurde in Experimenten gesucht. Nachdem 1768 BENJAMIN FRANKLIN (1706 - 1790) in einem kleinen Versuchsbecken die Auswirkung der Tiefe des Kanals auf den Widerstand untersucht hatte [Rouse, Ince 1957], [Lib., Tou. 1976], wurde kurz darauf in Frankreich mit Versuchen größeren Umfangs begonnen: Im Jahre 1775 wurden JEAN LE ROND D´ALEMBERT (1717 - 1783), CHARLES BOSSUT (1730 - 1814) und der Marquis DE CONDORCET [ACB 1777] von der französischen Regierung beauftragt, Versuche zum Widerstand von Booten in Kanälen durchzuführen. Für diesen Zweck wurde innerhalb eines großen Wasserbeckens ein hölzerner Kanal rechteckigen Querschnitts gebaut, dessen Tiefe durch einen beweglichen "Kanalboden" variiert werden konnte. Durch diesen etwa 22 Meter langen Kanal wurden Versuchsboote mit verschiedenen Geschwindigkeiten gezogen. Das Augenmerk wurde bei diesen Versuchen

[1] Eine Zwischenüberschrift des Artikels [Lib., Tou. 1976] lautet sogar: "Während eines Jahrhunders hat man die solitäre Welle beobachtet ohne sie zu beschreiben". Da eben bis heute keine Beschreibungen der solitären Welle aus diesem erwähnten Jahrhundert bekannt ist, drückt obige Überschrift wohl nur eine - wissenschaftshistorisch nicht uninteressante - Vermutung aus.

allerdings nicht auf die Wellen gelenkt, die von den Booten verursacht wurden, und so blieb die solitäre Welle unerwähnt. Ähnliche Versuche in einem Kanal führte später MARK BEAUFOY (1764 - 1827) in London durch [Beaufoy 1814, 1822]; auch hier blieb die solitäre Welle unerwähnt.

Laborexperimente speziell zur Erforschung der Wasserwellen stellten 1825 die Brüder ERNST HEINRICH WEBER (1795 - 1878) und WILHELM EDUARD WEBER (1804 - 1884) an, Professoren in Leipzig bzw. Halle [Web., Web. 1825]. Sie hatten eine 1,8 Meter lange, etwa 3 cm breite und etwa 60 cm tiefe Wanne mit Glasfenstern gebaut, um Wellen unter immer gleichen Verhältnissen beobachten und ausmessen zu können. In dieser im Verhältnis zur Tiefe sehr schmalen und kurzen Wanne kann keine solitäre Welle beobachtet werden, da sie, wegen der großen Tiefe der Wanne, die ganze Länge der Wanne ausfüllen würde. Durch diesen Umstand konnte die solitäre Welle nicht auftreten; bei günstigeren Maßen hätten die Brüder WEBER sie vermutlich entdeckt und ebenso genau beschrieben wie die oszillatorischen Wellen.

Nachdem vielfältige Experimente zur Erforschung der Wellen von d´ALEMBERT et al. bis zu den WEBERs die solitäre Welle nicht zur wissenschaftlichen Entdeckung bringen konnten, half ein Zufall in der Kanalschiffahrt. Im Jahre 1831 beschrieb W. FAIRBAIRN [Fairbairn 1831], wie sich vor einem gezogenen Kahn eine Welle aufbaute. Nach seinen Angaben vergrößerte sie sich bis zu einer Geschwindigkeit des Bootes von fünf Meilen pro Stunde, und ab fünf bis zehn Meilen pro Stunde verringerte sie sich. Das Verschwinden der Welle ging mit einer Verringerung des Wasserwiderstandes des Kahnes einher, was von Fairbairn als "very anomalous and contrary to all previous theory" bezeichnet wurde. A. BOURNE [Bourne 1835] veröffentlichte 1835 in den USA eine Erklärung dieses Phänomens: Nach LAGRANGE, so erklärte BOURNE, haben Flachwasserwellen die nur von der Wassertiefe H des Kanals abhängige Geschwindigkeit $c = (gH)^{1/2}$ (s.u. Gleichung 2.1). Ein Kahn schiebe die Welle so lange vor sich her, bis seine Geschwindigkeit größer sei als die der von ihm verursachten Welle. Dann steige er auf die Welle herauf und schiebe auf diese Weise weniger Wasser vor sich her. Die Welle ihrerseits werde kleiner und verschwinde schließlich. RUSSELL selbst berichtete [Russell 1840a, S. 79f], daß unabhängig von seinen Entdeckungen die solitäre Welle auf eben solche Weise genutzt worden war:

> "As far as I am able to learn, the isolated fact was discovered accidentally on the Glasgow and Ardrossan Canal of small dimensions. A spirited horse in the boat of WILLIAM HOUSTON, Esq., one of the proprietors of the work, took fright and ran off, dragging the boat with it, and it was then observed, to Mr. HOUSTON´S astonishment, that the foaming stern surge which used to devastate the bank had ceased, and the vessell was carried on through water comparatively smooth, with a resistance very greatly diminished. ... The result of this improvement was so valuable in a mercantile point of view, as to bring, from the conveyance of passengers at a hight velocity, a large increase of revenue to the Canal Proprietors. The passengers and luggage are conveyed in light boats, about sixty feet long and 6 feet wide, made of thin sheet-iron, and drawn by a pair of horses. The boat starts at a slow velocity behind the wave, and at a given signal it is by a sudden jerk of the horses drawn up on top of the wave, where it moves with diminished resistance, at a rate of 7, 8, or 9 miles an hour.
>
> It was a natural consequence of this successful mode of transport on this one canal, that it should be immediately attempted to others, and numerous experiments were accordingly made with varying results."

Die damaligen Experimente und Beobachtungen zeigen, daß die Entdeckung der solitären Wasserwelle "in der Luft lag". Damit soll nicht gesagt sein, daß RUSSELL nur noch nach einer reifen Frucht zu greifen brauchte, die vor ihm keiner pflücken wollte. RUSSELLs besondere Leistung lag nicht in der zufälligen Beobachtung der Welle, sondern im Erkennen ihrer Bedeutung. RUSSELL hatte erstmals den *Begriff* der solitären Welle. Das macht ihn zu deren Entdecker. Nicht unwichtig war auch sein Beharren auf ihrer Besonderheit, allen Widrigkeiten zum Trotz. Denn spätere Versuche, RUSSELLs Welle theoretisch zu erklären, führten bis zu Behauptungen, daß es sie gar nicht geben könne [Airy 1845], [Stokes 1847]. Die noch junge Hydrodynamik hatte bis dahin keine Theorie hervorbringen können, die RUSSELLs Beobachtungen untermauern konnte, obwohl es gewisse Ansätze dazu bereits gab.

50 Jahre nachdem DANIEL BERNOULLI (1700 - 1782) 1738 mit seinem Werk "Hydrodynamica" den Grundstein der Hydrodynamik gelegt hatte, war JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736 - 1813) einer der ersten, der sich gegen Ende des 18. Jahrhunderts mit Wellenphänomenen grundlegend auseinandersetzte [Rouse, Ince 1957]. In "Mechanique Analytique" [Lagrange 1788] - einer Fortsetzung seines früheren Werkes "Memoire sur la théorie du mouvement des fluides" [Lagrange 1781] - behandelte LAGRANGE Wellen kleiner Amplitude an der Oberfläche eines flachen Kanals rechteckigen Querschnitts. Diese theoretische Behandlung hätte wohl eine erste Wurzel der Solitonentheorie bilden können, denn LAGRANGE hatte erkannt, daß bei nicht kleinen Wellenamplituden die zu behandelnden Gleichungen nichtlinear sein sollten, d.h. lineare Näherungen nicht ausreichten. Die exakte Behandlung der nichtlinearen Gleichungen war ihm jedoch nicht möglich, so daß er doch nur in Näherungen den einzigen Ausweg sah [Lagrange 1788, S. 512f, Übersetzung des Autors]:

> "Die Integralrechnung ist noch weit von den Fähigkeiten entfernt, die es braucht, um die so komplizierten Gleichungen, um die es hier geht, lösen zu können. Und es bleibt keine andere Wahl, als diese Gleichung durch einige Einschränkungen zu vereinfachen. Wir nehmen an, daß die Flüssigkeit sich in ihren Bewegungen nur unendlich wenig über oder unter das Niveau erhebt oder absenkt, so daß in den gestellten Gleichungen die unendlich kleinen Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt werden können, d.h. daß diejenigen (Terme), die Quadrate tragen, sich auf eine lineare Form reduzieren."

Auf diese Weise gelangte LAGRANGE zu der d´Alembertschen Gleichung und damit zu der mit seinem Namen verbundenen Gleichung für die Geschwindigkeit von Flachwasserwellen:

$$c = \sqrt{g\,H}\ , \tag{2.1}$$

wobei $g$ die Schwerebeschleunigung und $H$ die Wassertiefe bezeichnet. Diese Relation regte ihn an, einen Vergleich zwischen Flachwasser- und Schallwellen zu ziehen, indem er bemerkte, daß sich Schallwellen nach der selben Gleichung fortbewegen wenn, für $H$ die Dicke der (homogen angenommenen) Atmosphäre genommen wird, ein Gedanke, den ein Jahrhundert später RUSSELL aufgriff.

Die Anwendung der hydrodynamischen Gesetze auf praktische Probleme war, wie LAGRANGE und vor ihm auch schon EULER vorhergesehen hatten, eine schwierige Aufgabe. Daher waren die damaligen Mathematiker, die sich mit der Hydrodynamik beschäftigten, immer wieder darauf angewiesen, so lange vereinfachende Annahmen zu machen, bis das behandelte Problem lösbar wurde [Rouse, Ince 1957]. D´ALEMBERT zeigte dazu folgende Einsicht (Übersetzung des Autors aus [Giacomelli 1934]):

> "Wenn eine Frage, die wir untersuchen möchten, mit all ihren Elementen zu einer zu komplizierten analytischen Form führt, so isolieren wir die mehr unangenehmen Elemente

und ersetzen sie durch angenehmere. Und dann sind wir überrascht, trotz all unserer mühsamen Arbeit ein Resultat zu erhalten, das der Natur widerspricht; als ob alles Verändern, Vereinfachen, Verstümmeln durch bloßes mechanisches Räsonieren rückgängig gemacht werden könnte."

Wie bei LAGRANGE, der die Flachwasserwellen nicht kleiner Amplitude wegen der damit verbundenen komplizierten Gleichungen nicht behandeln konnte, zieht sich das Problem der intraktiblen Gleichungen und unkorrekten Näherungen wie ein roter Faden durch die frühe Geschichte der Solitonentheorie. Meinungsverschiedenheiten um die von RUSSELL beschriebene solitäre Welle waren unter anderem die Folge. Und es war ein langer und mühsamer Prozess, zu einem Konsens zu kommen, d.h. zu einer akzeptierten Theorie der solitären Welle. An ihm beteiligten sich nicht wenige der namhaftesten Mathematischen Physiker des 19. Jahrhunderts, unter ihnen AIRY, STOKES, LORD RAYLEIGH, BOUSSINESQ und SAINT-VENANT.

## 2.1 Russells Entdeckung der "solitären Welle"

Im Jahre 1834 hatte der gerade 26 Jahre alte JOHN SCOTT RUSSELL schon eine interessante universitäre Karriere hinter sich (siehe Kurzbiographie). Ab 1830 hatte er sehr geschätzte Vorlesungen über Mathematik und Naturwissenschaften am Royal College of Surgeons gehalten. Gleichzeitig konstruierte er dampfgetriebene Wagen, die den Omnibusverkehr zwischen Städten aufnahmen. Als die Scottish Steam Carriage Co. 1833 eine Omnibuslinie zwischen Edinburgh und Glasgow in Erwägung zog, bekam RUSSELL von der Union Canal Company, die den Schiffsverkehr zwischen Edinburgh und Glasgow unterhielt, das Angebot, ihren Kanal auf die Befahrbarkeit durch schnellere Dampfschiffe hin zu untersuchen [Emerson1977][2]. Durch diese Aufgabe fand RUSSELL zu dem am meisten beachteten Teil seines Lebenswerks, der Konstruktion von Schiffen.

Ab 1834 machte RUSSELL, meist im Union Canal, aber auch in anderen Kanälen [Russell 1840a], Experimente größeren Stils zur Erforschung des Wasserwiderstands von Schiffen mit dem Ziel, die Schiffsform des geringsten Widerstands zu finden. Wie schon andere vor ihm, stellte er schnell fest [Russell 1834, 1835a, b], daß der Widerstand eines Kahnes im Wasser eines Kanals sich nicht so verhielt, wie es das Newtonsche Gesetz der Reibung vorhersagt. Da es in der theoretischen Hydrodynamik keine weiteren Ansätze zur Beschreibung des Widerstandes gab, machte RUSSELL es sich zur Aufgabe, das Widerstandsverhalten von Schiffen im Wasser zu erforschen. Er beobachtete, daß der Widerstand der Boote bei größerer Geschwindigkeit sogar geringer sein konnte als bei kleinerer und führte das, wie auch schon Forscher vor ihm [Challis 1833], auf das mit der Geschwindigkeit zunehmende Auftauchen des Schiffskörpers aus dem Wasser zurück [Russell 1834]. Im Sommer 1834 unternahm er zahlreiche Experimente mit Kähnen vieler Größen, um das Widerstandsverhalten im Wasser in Gesetze zu fassen, was ihm

[2] [Bull., Cau. 1980] erwähnen in diesem Zusammenhang: "There seems to have been no contract, but the Union Canal Company paid the expenses - according to their report of 27th January, 1835: Report on the practical results of experiments on Canal Navigation (Canal Office, Edinburgh)."

jedoch nicht gelang. Denn bei höheren Geschwindigkeiten tauchten die gezogenen Kähne nicht aus dem Wasser auf, sondern wurden eher im Wasser begraben (s. Abb. 2.1). Außerdem verhielt sich der Widerstand in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und dem Kanalsegment, in dem die Experimente stattfanden, zu unterschiedlich. Daß die schon entdeckte, vor dem Kahn sich aufbauende Welle, in diesem Zusammenhang die Schlüsselrolle spielte, war RUSSELL bis dahin noch unbekannt.

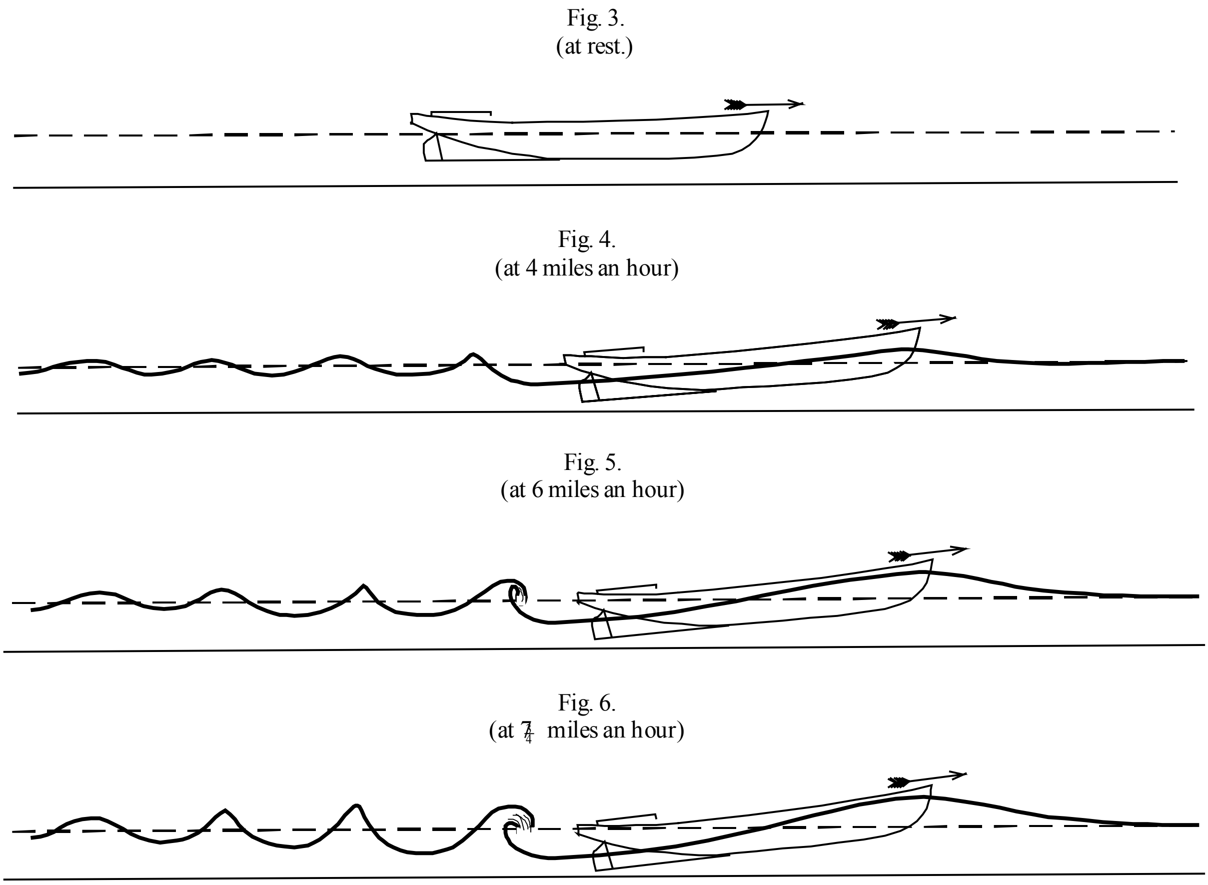


*Abbildung 2.1:*
*Wellenbildung eines bewegten Bootes im Kanal. (Zeichnung aus [Russell 1840a].)*

Während eines seiner vielen Experimente am Kanal jedoch machte der Zufall ihn, wie schon die Entdecker vor ihm, auf die Welle aufmerksam [Russell 1840a, S. 61]:

> "In directing my attention to the phenomena of the motion communicated to the fluid by the floating body, I early observed one very singular and beautyful phenomenon, which is so important, that I shall describe minutely the aspect under which it first presented itself. I happened to be engaged in observing the motion of a vessel at a high velocity, when it was suddenly stopped, and a violent and tumultuous agitation among the little undulations which the vessel had formed around it, attracted my notice. The water in various masses was observed gathering in a heap of a well-defined form around the centre of the length of the

vessel. This accumulated mass, raising at last a pointed crest, began to rush forward with considerable velocity towards the prow of the boat, and then passed away before it altogether, and retaining its form, appeared to roll forward alone along the surface of the quiescent fluid, *a large, solitary, progressive wave.* I immediately left the vessel, and attempted to follow this wave on foot, but finding its motion too rapid, I got instantly on horseback and overtook it in a few minutes, when I found it pursuing its solitary path with a uniform velocity along the surface of the fluid. After having followed for more than a mile, I found it subside gradually, until at length it was lost among the windings of the channel. This phenomenon I observed again and again as often as the vessel, after having been put in rapid motion, was suddenly stopped; and the accompanying circumstances of the phenomenon were so uniform, and some consequences of its existence so obvious and important, that I was induced to make *The Wave* the subject of numerous experiments."[3]

Fig. 9.

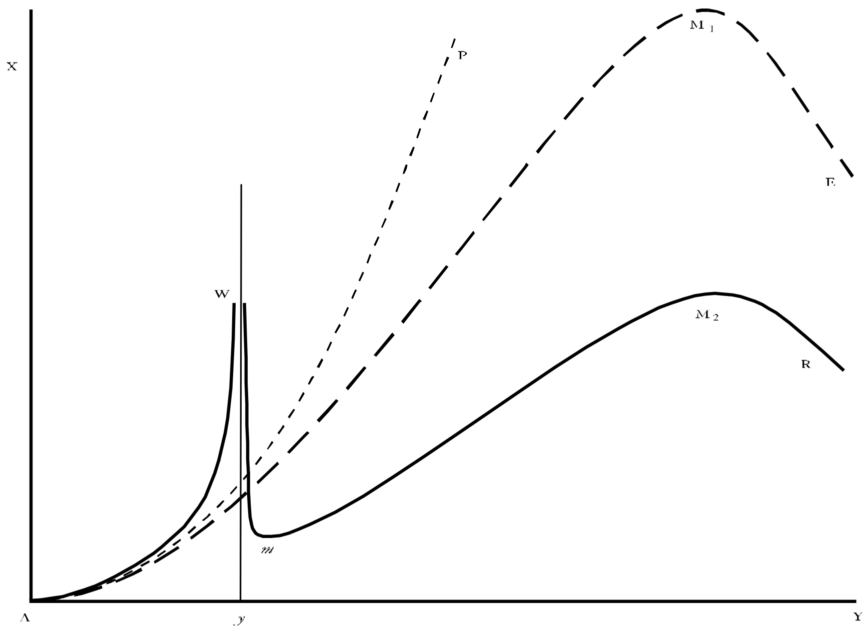


*Abbildung 2.2:*
*Widerstand eines Schiffes in einem Kanal in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit (Zeichnung aus [Russell 1840a]). Die eng gestrichelte Linie AP stellt das Newtonsche Gesetz*

[3] Dies ist RUSSELLs zweite Beschreibung des Augenblicks seiner Entdeckung. Die erste, nicht ganz so bildhafte Beschreibung findet sich in [Russell 1837b]. Es gibt in seinen Arbeiten noch weitere, ähnliche Beschreibungen dieses Augenblicks [Russell 1844, 1865, 1885].

Es wird behauptet, das die solitäre Welle erzeugende Boot sei auf ein unter Wasser liegendes Hindernis gefahren und deshalb abrupt abgebremst worden [Buch., Ger. 1991]. In RUSSELLs Arbeiten findet sich keine solche Beschreibung.

In [Russell 1881] beginnt Russell mit: "Short history of the wave of translation discovered by me in 1832-3." Die Jahreszahl widerspricht mehreren seiner früheren Angaben, die das Jahr 1834 nennen, und es ist zu vermuten, daß RUSSELL sich bei der Angabe "1832-3" geirrt hat.

*dar, die Linie* $AM_1$ *E den Widerstand eines Schiffes im offenen Gewässer und die Linie* $AWmM_2$ *R den Widerstand im Kanal.*

Fig. 7.— Behind the Wave.

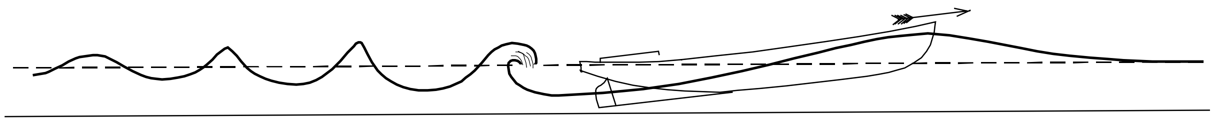

Fig. 8.— Upon the Wave.

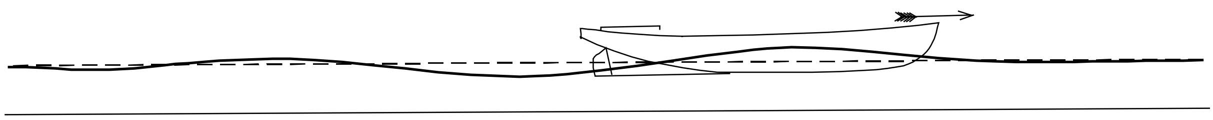

*Abbildung 2.3:*
*Wellenbildung eines bewegten Bootes im Kanal. (Zeichnung aus [Russell 1840a].)*

RUSSELL bemerkte sehr schnell, daß die Welle ohne ihre Form zu verändern durch den Kanal lief, also eine sich fortbewegende Einzelwelle blieb. Er nannte sie daher zuerst "solitary wave". Auch die unveränderte Geschwindigkeit und Höhe der Welle war ihm aufgefallen, wobei er das langfristige
Kleinerwerden der Welle durchaus bemerkte und ganz richtig auf Energieverluste im Kanal zurückführte. Schon diese ersten Merkmale machten die Welle für RUSSELL so besonders und hoben sie aus allen anderen, bekannten Wellenformen hervor. Diese Entdeckung konnte auch zur Frage nach dem Widerstand von Schiffen in Kanälen beitragen, denn RUSSELL erkannte schnell, daß diese seine solitäre Welle nicht nur konstante Form besaß, sondern auch eine nur von der Form und Tiefe des Kanals abhängige Geschwindigkeit. Anhand der vielen Experimente in Kanälen konnte RUSSELL die schon früher erkannten, aber bis dahin unverstandenen Anomalien des Widerstandes von Schiffen in Kanälen und dessen Abweichungen vom Newtonschen Gesetz wie BOURNE erklären. Die Geschwindigkeit, bei welcher der Widerstand des Schiffes ein Maximum erreichte und der sogar manchmal nicht zu überwinden war (Punkt y in Abb. 2.2), entsprach der Geschwindigkeit der solitären Welle. Erreichte das Boot die Geschwindigkeit der Welle und konnte sie überwinden, so "kletterte" es auf die Welle und fuhr nun waagerecht auf der Welle durch den Kanal, ohne viel weiteres Wasser vor sich her zu schieben, mit der Folge, daß der Widerstand des Bootes abnahm (s. Abb. 2.3).

Für die Kanalschiffahrt war es nun von Interesse, die Geschwindigkeit der Welle zu bestimmen. RUSSELLs Bemühungen zielten darauf ab, sie in Gesetze zu fassen, was ihm zuerst Schwierigkeiten bereitete. Denn sie hing, wie er später feststellte, von der Form des Kanalprofils ab und nicht von der Geschwindigkeit oder Form des auslösenden Bootes. In Experimenten stellte er 1834 zuerst fest, daß sie von den zwei Größen, der Kanaltiefe $H$ und der Wellenamplitude $h$, abhing [Russell 1840a]. Er kam rein empirisch zu einem Ausdruck für die

Geschwindigkeit der solitären Welle, nämlich

$$c = \sqrt{g(H+h)}\ . \tag{2.2}$$

Diese Gleichung ist eine Modifikation der Gleichung von LAGRANGE (Gleichung 2.1). RUSSELL war LAGRANGEs grundlegende Arbeit über Wellen bekannt und er äußerte 1844, daß sich die von ihm gefundene Geschwindigkeit der Welle gut mit LAGRANGEs Gleichung verträgt. Das legt es nahe, daß RUSSELL sein Resultat an LAGRANGEs anlehnte, die Amplitude h der Welle, wie es die Ergebnisse seiner Experimente verlangten, einfügte und so zu seiner Formel kam. Die neuen Erkenntnisse trug RUSSELL 1835 der British Association for the Advancement of Science vor, die in dem Jahr gerade in der Stadt Edinburgh, in deren Nähe er seine Experimente machte, ihre Jahrestagung abhielt. Mit seinem Beitrag gelang es ihm, auf der wichtigsten wissenschaftlichen Tagung des Landes vor bedeutendem Publikum großes Interesse für Studien an Wellen zu erregen [Emerson 1977].

Bis dahin war allerdings die Frage nach der Rumpfform des geringsten Widerstandes noch nicht geklärt. Um sie zu klären, lenkte RUSSELL seine Aufmerksamkeit auf die von den Booten auf das Wasser übertragene Bewegung und die damit entstehende Wasserbewegung. Er tat Apfelsinen ins Wasser des Kanals, um Wasserteilchen zu simulieren. Er wollte damit sichtbar machen, wie sich das vom Boot verdrängte Wasser bewegte [Emerson 1977]. Das Boot, theoretisierte er, pflügte eine Rinne in das Wasser so tief und breit wie das Boot selber. Aber was geschah mit dem verdrängten Wasser? Wurde es zusätzlich vor dem Boot hergeschoben wie es die solitäre Welle nahelegte? Eine Antwort, so dachte er, konnte vielleicht eine kleine Menge Wasser geben, die einem ruhenden Gewässer zugegeben wurde. Daher konstruierte RUSSELL noch 1834 einen kleinen künstlichen Kanal, ein Fuß breit, ein Fuß tief und 20 Fuß lang, den er 1/2 Fuß hoch mit Wasser füllte. Ein Experiment mit dieser Wanne schilderte RUSSELL so [Russell 1865 S. 213]:

> "I made a little reservoir of water at the end of the trough, and filled this with a little heap of water, raised above the surface of the fluid in the trough. The reservoir was fitted with a movable side or partition; on removing which, the water within the reservoir was released. It will be supposed by some that on the removal of the partition the little heap of water settled itself down in some way in the end of the trough beneath it, and that this end of the trough became fuller than the other, thereby producing an inclination of the water´s surface, which gradually subsided till the whole got level again. No such thing. The little released heap of water acquired life and commenced a performance of its own, presenting one of the most beautyful phenomena that I ever saw. The heap of water took a beautyful shape of its own; and instead of stopping, ran along the whole length of the channel to the other end, leaving the channel as quiet and as much at rest as it had been before. If the end of the channel had just been so low that it could have jumped over, it would have leaped out, disappeared from the trough, and left the whole canal at rest just it was before.
>
> This is a most beautyful and extraordinary phenomenon; the first day I saw it was the happiest day of my life. ... When I described this to John Herschel, he said, "It is merely half of a common wave that has been cut off". But it is not so, because the common waves go partly above and partly below the surface-level; and not only that, but its shape is different. Instead of being half a wave, it is clearly a whole wave, with this difference, that the whole wave is not above and below the surface alternately, but always above it. So much for what a heap of water does; it will not stay where it is, but travels to a distance."

RUSSELL begeisterte sich so für seine Entdeckung, daß er in den Sommern der Jahre 1834 und 35 in seiner Freizeit zahllose Experimente in dem ihm zur Verfügung stehenden Union Canal machte. Eine Illustration seiner Experimentierfreude mag die folgende Schilderung geben [Russell 1865, S. 214]:

> "... I took vessels on a large scale, and had them dragged by horses, and in other ways, through the water; and I ascertained, by positive measurement and observation, what became of all the water displaced by the bow of the boat. I had the traffic of a very large canal, some thirty miles long, placed at my disposal; and I will tell you a phenomenon which I produced again and again: I drew so large a number of boat one way on one day along that canal, that the successive waves carried a great part of the water of the canal entirely from one end of it to the other; and we found in the evening the canal at the far end eighteen inches deeper, and at the other eighteen inches shallower, than its normal depth. We thus proved that the water excaved out of the canal by each of the boats had been send to the other end of the canal."

Der Umstand, daß die von den Kähnen erzeugte solitäre Welle einen Transport von Wasser durch den Kanal bewirkte, veranlaßte RUSSELL, den Ausdruck "the solitary wave of translation" für seine Welle zu prägen. Mit diesem Ausdruck hob RUSSELL die beiden sofort sichtbaren Eigenschaften seiner Welle hervor, die sie von oszillatorischen Wellen ohne Transporteigenschaften unterschied. Im Laufe der Jahre bis 1844, in denen sich RUSSELL mit der Erforschung von Wellen beschäftigte, verwendete er meist den Namen "wave of translation" anstelle von "solitary wave". Da deren sichtbarstes Charakteristikum aber die *einzelne* Welle war, nannte er sie auch "solitary" als Adjektiv: "the solitary wave of translation", neben anderen, selteneren Bezeichnungen wie "the great wave" oder "the primary wave of first order" sowie Kombinationen. RUSSELL hatte alle Wasserwellen in vier Kategorien geteilt. Die Kategorie, zu der er neben der solitären Kanalwelle auch die Gezeitenwelle rechnete, bildete die erste Kategorie. Daher die Bezeichnung "of first order". Die Beschreibung dieser Kategorien findet sich in [Russell 1840a] und bei [Bullough 1988].

Schon 1834 begann RUSSELL mit der Konstruktion dreier Stahlschiffe, 20 m und 40 m lang, für Versuchszwecke, die die Union Canal Co. in einer Werft in Greenock bei Liverpool bauen ließ. Ihre neue Rumpfform, die sich durch einen spitzen Bug und eine Wasserlinie in Form der solitären Welle auszeichnete, zeigte sich in Kanälen so überlegen gegenüber den traditionellen Rumpfformen, daß 1836 ein viertes Schiff folgte und bald darauf mehrere weitere. In den darauffolgenden Jahren setzte sich RUSSELLs Rumpfform im Schiffbau allgemein durch. RUSSELLs Erkenntnisse über die solitäre Welle und die mit ihr verbundene Erklärung des Wasserwiderstands von Schiffen konnten die Möglichkeit zu einer wesentlichen Verbesserung der Kanalschiffahrt schaffen. Das bewog RUSSELL, die wichtigsten Ergebnisse seiner Experimente praxisbezogen für den Schiffbau, insbesondere für die Formgebung des Rumpfes, zu veröffentlichen [Russell 1836], [Russell 1837a], [Russell 1840b]. Diese Ergebnisse stellte er auf einer Versammlung der British Association im August 1836 in Bristol vor. Der amtierende Präsident der Association, der Marquis of Northumberland, gratulierte RUSSELL und erklärte, daß er sich der Dankbarkeit der Nation für seine Experimente sicher sein konnte. Knapp ein Jahr später veröffentlichte RUSSELL die Ergebnisse von 1834 und 35 mit ausführlichen Kommentaren und Zeichnungen [Russell 1840a]. Dieser Artikel von ihm über den Reibungswiderstand von Schiffen wurde mit der Goldmedaille der Royal Society of Edinburgh ausgezeichnet. RUSSELL wurde Mitglied der Society und "Member of Council" [Emerson 1977].

Die Erforschung von Wasserwellen bekam mit RUSSELLs Entdeckungen so großen Stellenwert, daß auf jener Versammlung der Association 1836 in Bristol das "Committee of Waves" ins Leben gerufen wurde. Es hatte die Aufgabe zu erforschen, was eine Welle ist und inwiefern sich Meereswellen von der Gezeitenwelle, also Ebbe und Flut, unterscheiden [Russell 1837b]. Das Committee bestand aus dem Sekretär der Royal Society of Edinburgh Sir JOHN ROBISON, der RUSSELL schon 1834 durch seinen Einfluß größere Experimente am Union Canal ermöglicht hatte, und RUSSELL selber, wobei RUSSELL allein zuständig war für die Durchführung der Experimente und das Vortragen der Ergebnisse. Obwohl er nicht ausschließlich an seinen Experimenten zu Wellen arbeitete - es wird gemutmaßt, daß er zu dieser Zeit mehrere Schiffsbauten auf der Werft in Greenock beaufsichtigte [Emerson 1977] - begann er schon im September 1836, im Monat nach der Gründung des Committees, mit sehr ausführlichen Experimenten zur Gezeitenwelle am River Dee bei Chester. Im Oktober 1836 stellte er zwei Wochen lang Beobachtungen zu Meereswellen von einer Segelyacht aus an und vermaß im April/Mai 1837 mit der ihm eigenen Gründlichkeit wiederum Gezeitenwellen, diesmal im sehr unregelmäßigen River Clyde bei Glasgow. Anschließend machte er im August 1837 Experimente mit solitären Wellen in seinem künstlichen Becken, von denen er 149 zur Auswertung veröffentlichte [Russell 1840a]. Ab 1838 war RUSSELL an der Werft von Thomson & Spiers in Greenock für die Konstruktion von Schiffen zuständig. Trotzdem widmete er sich mit viel Energie weiterhin der Forschung. Neben seinen Aufgaben in dem "Committee on the Form of Ships" der British Association, für das er 1843 einen Abschlußbericht mit etwa 20.000 Beobachtungen bei Experimenten mit über 100 verschiedenen Schiffen vorlegte, führte er Forschungen über Gezeitenphänomene [Russell 1842b], Dämme, Wellen und Wellenbrecher zur Uferbefestigung durch. Gleichzeitig vollendete er einen Artikel in der Encyclopaedia Britannica über Dampfmaschinen und Dampfschiffahrt.[4]

RUSSELL war 1840 nach London gezogen; es ist nicht ganz klar, warum. Vielleicht suchte er weitere Betätigungsfelder, die er in dem kleinen Hafenstädtchen Greenock nicht fand [Emerson 1977]. Er wurde Redakteur der Londoner "Railway Chronicle", einem Kind der gerade beginnenden großen Epoche der Eisenbahnen. Seine Pflichten im Committee of Waves, dessen einziges Mitglied er war - Sir ROBISON war 1838 gestorben - veranlaßte ihn, noch einmal zu abschließenden Forschungen über Wellen zurückzukehren. Er machte zahlreiche Versuche in langen Wannen verschiedener Formen und Profile mit dem Ziel, die früher gefundenen Ergebnisse zur solitären Welle abzusichern und zu ergänzen und jegliche Unklarheiten zu beseitigen. Im Jahre 1844 legte RUSSELL der British Association den Abschlußbericht des "Committee of Waves" vor, der seine Forschungsergebnisse von 1834 bis 1844 über Wellen zusammenfaßt [Russell 1844]. Dieser Report unterscheidet sich nur in der Genauigkeit der Ausführungen und in Details von den früheren Reports [Russell 1837b, 1840a, c, 1842a], die RUSSELL schon vor der Association abgegeben hatte. RUSSELL hatte in den zehn Jahren der Erforschung von Wellen hunderte von Experimenten in Kanälen, Wannen und Flüssen (zu Gezeiten) zur solitären Welle gemacht, so daß ihm kaum ein sichtbares Detail verborgen bleiben konnte. Seine mathematischen Fähigkeiten waren allerdings eher schwach ausgeprägt, weshalb die mathematisierten Erklärungsversuche in seinen Arbeiten in der Regel nicht weit führen. Sein Ansatz zur Erklärung des Phänomens ist daher ein ganz anderer als der heute gewohnte über die Korteweg-de Vries-Gleichung (KdV-Gleichung). RUSSELL hat einerseits mehr gesehen, als es nur über die KdV-Gleichung möglich ist, andererseits sind ihm Dinge, die in der Natur nicht direkt zu beobachten sind, verborgen geblieben. Sofort bei seiner Entdeckung der solitären

[4] Eine Auflistung von wissenschaftlichen Arbeiten RUSSELLs ist in [Bull., Cau. 1980] zu finden.

Wasserwelle im Jahre 1834 waren ihm zwei Merkmale aufgefallen: die Form einer einzelnen Welle und ihre Unveränderlichkeit. Sehr schnell danach entdeckte er ihre Transporteigenschaften. Erst nach einigen weiteren Forschungsarbeiten kam er dann zu der konstanten Geschwindigkeit. Die in Gleichung (2.2) angegebene Geschwindigkeit bezeichnete er als eine der Grundeigenschaften der Welle. Und die Richtigkeit der Gleichung war 1844 für ihn durch Experimente genau und zweifelsfrei erwiesen. Die für Solitonen so bedeutende Kollisionseigenschaft beobachtete RUSSELL auch, jedoch konnte er sie nicht als Besonderheit einordnen. Er schrieb 1836 [Russell 1837b, S. 425]:

> "The great primary waves of translation cross each other without change of any kind in the same manner as the small oscillations produced on the surface of a pool by a falling stone."

Diese ja nicht ganz richtige Beobachtung, denn RUSSELL übersah die Phasenverschiebung der solitären Wellen, schien ihm selbstverständlich. Daß diese Eigenschaft schon aufgrund der von der Wellenamplitude abhängigen Geschwindigkeit der solitären Welle, die RUSSELL 1836 schon erkannt hatte, nicht selbstverständlich ist, fiel ihm nicht auf. RUSSELL hat viele Versuche gemacht, in denen er solitäre Wellen kollidieren ließ (siehe auch Abb. 2.4).

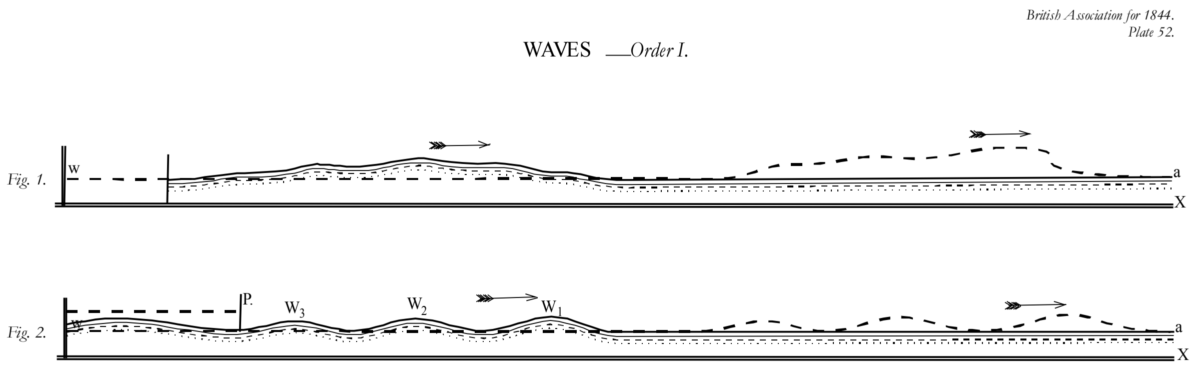


*Abbildung. 2.4:*
*Aus [Russell 1844, Plate 52] entnommene Darstellungen. Mehrere solitäre Wellen laufen durcheinander durch und führen zum Brechen der Welle (Fig.1) oder sie trennen sich in einzelne solitäre Wellen (Fig.2).*

Zwei dieser Versuche hatten deutlich zum Ergebnis, daß die solitären Wellen sich nicht linear überlagerten [Russell 1844]: In einem Versuch ließ RUSSELL zwei gleich große positive solitäre Wellen gegeneinander laufen. Wenn sie sich linear überlagern, so dacht er sich, entspricht die Form der zurückbleibenden benetzten Fläche auf der Kanalwand der Form einer einzelnen solitären Welle. Doch nach dem Experiment entsprach die nasse Spur auf der Kanalwand nicht seinen Aufzeichnungen der Formen der solitären Welle. RUSSELL ließ dieses Resultat, das ihn auf eine besondere Art der Überlagerung hätte schließen lassen können, als interessantes Phänomen stehen und verfolgte es nicht weiter. In einem anderen Versuch ließ RUSSELL eine negative (nicht solitäre) Welle gegen eine gleich große positive laufen und stellte fest, daß sie sich ganz in oszillatorische Wellen "auflösten". Bei dem Versuch, eine positive Welle eine gleich große negative überholen zu lassen stellte er Analoges fest. Diese Versuche widersprechen der linearen Superposition, doch RUSSELL ging dem nicht weiter nach.

Es scheint, als ob RUSSELL die Andersartigkeit der solitären Welle nicht konsequent erkannt hätte, denn auch die Form seiner einzelnen Welle gab er immer mit periodischen Funktionen an. Er hatte 1836 und 1837 [Russell 1837b, 1840a] die Form der Welle mit "prolate cycloid" beschrieben (verkürzte Zykloide oder Trochoide), die für große solitäre Wellen bis zur Zykloide anwachsen kann, um bei weiterer Steigerung den "Kopf" einer verlängerten Zykloiden zu bekommen. Dieser sollte zum Brechen der Welle führen. In seiner Arbeit von 1844 hingegen meinte RUSSELL, daß die Grundform der solitären Wasserwelle der bewegte Sinus sei. Diese Behauptung erscheint zuerst merkwürdig, denn aus seinen Zeichnungen der Welle ist klar ersichtlich, daß ihre Form nicht mit einem Sinus zu beschreiben ist. Doch RUSSELL lieferte eine erklärende Theorie, die den Sinus mit seinen Zeichnungen verband. Sehr schön zeigt sich an ihr, wie RUSSELL mehr bildhaft und nicht mathematisch seine Beobachtungen erklärte. Mit Hilfe der von ihm sehr genau untersuchten Bewegung der Wassermoleküle beim Passieren der solitären Welle gelang es RUSSELL, den Sinus zu Formen zu verkürzen, die seinen Aufzeichnungen der solitären Wellen entsprachen (s. Abb. 2.5).

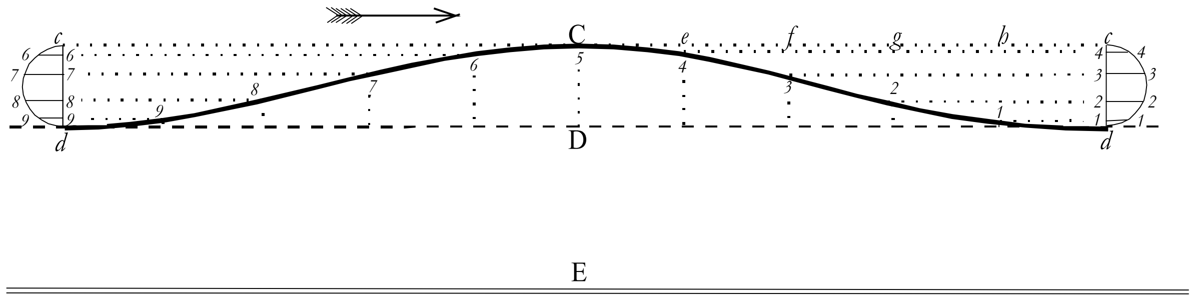


Fig. 3.

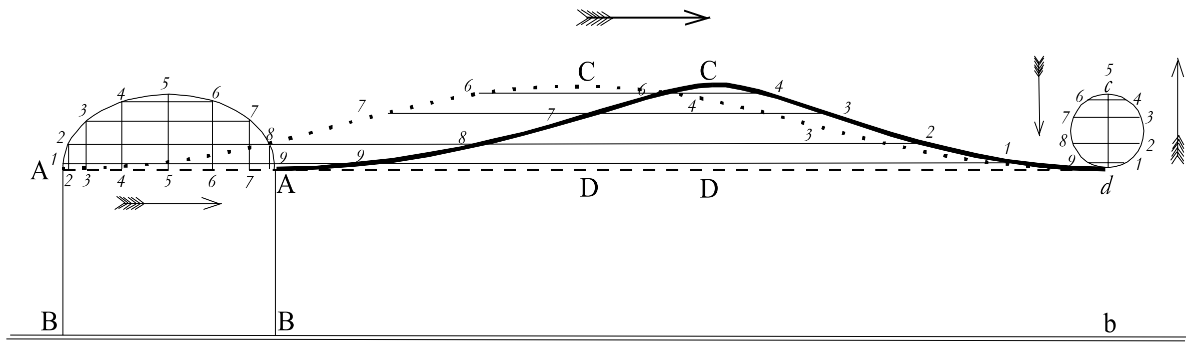


Fig. 4.

*Abbildung 2.5:*
*Aus [Russell 1844, Plate 52] entnommene Darstellungen. RUSSELLs Konstruktion der Form der solitären Welle auf der Grundfunktion des Sinus (Fig. 3). Die gegenüber der Sinusfunktion steileren Formen der höheren Wellen (durchgezogene Welle in Fig. 4) entstehen aus der Verkürzung der Sinusfunktion (gepunktete Linie) durch die Translationsbewegung der Wassermoleküle in Richtung der Wellenbewegung. Die Translationsbewegung der Moleküle an der Wasseroberfläche ist in der halben Ellipse links in Fig. 4 dargestellt. Werden die*

*nummerierten Punkte der gepunkteten Sinusfunktion um den am unteren Rand der halben Ellipse entsprechend angegebenen Betrag nach rechts verschoben, entsteht die durchgezogene Form der solitären Welle.*

RUSSELL hatte beobachtet, daß die Wellenlänge einer solitären Welle mit zunehmender Höhe der Welle bei gleicher Wassertiefe abnahm. Daher schloß er, daß die Bewegung der "Wasserteilchen" die Wellen verkürzte. Durch eine Überlagerung des Sinus als Grundform der Wellen mit der beobachteten Ellipsenhälfte der Wasserbewegung gelang es ihm, eine Form zu konstruieren, die seinen Beobachtungen entsprach. Die Abbildung 2.5 verdeutlicht RUSSELLs Konstruktion. Diese Art der Konstruktion war nicht ungewöhnlich. FRANZ GERSTNER (1756 - 1832) war in seiner vielbeachteten Arbeit [Gerstner 1804] auf ganz ähnlichem Wege zu der zykloiden Form für Wellen in tiefem Wasser gekommen.

Neben diesen grundlegenden Eigenschaften der solitären Wellen beobachtete RUSSELL weitere Phänomene. Unter anderem:

* Eine negative Welle hatte nicht die Eigenschaften der positiven solitären Welle. Weder Konstanz, oben beschriebene Form, noch eine Geschwindigkeit nach Gleichung (2.2) waren zu beobachten.
* Die maximale Wellenhöhe entsprach etwa der Wassertiefe des Kanals:

  $$h_{\max} \approx H$$

  Wurde der Kanal flacher, so verringerte sich auch die maximale Höhe der Welle, die sich durch Brechen der gesunkenen Wassertiefe anpaßte.
* Die Höhe der Welle war abhängig von der Breite $b$ des Kanals, falls diese entlang des Laufes des Kanals variierte:

  $$h \propto \frac{1}{\sqrt{b}}$$

* Bei nicht rechteckigem Kanalprofil galt Gleichung (2.2) nur modifiziert.

Mit dem Abschlußbericht des Committee of Waves 1844 waren auch RUSSELLs experimentelle Forschungen an Wellen abgeschlossen; er griff sie nicht wieder auf. Wie sehr er sich jedoch sein ganzes Leben, zumindest immer wieder, mit der "wave of translation" beschäftigte, zeigen seine Bücher über den Schiffbau [Russell 1865] und über die solitäre Welle selbst [Russell 1885]. Im Schiffbau verwendete RUSSELL die von ihm gefundenen Gesetze der solitären Welle bei der Konstruktion von Schiffsrümpfen. Und in seinem letzten Werk [Russell 1885], an dem RUSSELL, wie es das Vorwort vermuten läßt, bis zuletzt gearbeitet hatte und vor dessen Erscheinen er schon verstorben war, wandte er die von ihm gefundenen Gesetze der solitären Welle auf Luft und Äther an. Mit großer Ausführlichkeit und Hingabe lieferte er auf diese Weise einen Erklärungsversuch für die Gesetze des Schalls sowie des Aufbaus der Materie und des Weltalls. In diesem Zusammenhang gab er die Tiefe der Atmosphäre mit fünf Meilen sowie die des Weltalls mit $5 \times 10^{17}$ Meilen an. Während der erste Wert recht gut stimmt, zeigen modernere Forschungen, daß RUSSELLs zweiter Wert um fünf Zehnerpotenzen zu klein ist.

Nach 1840 verlor die solitäre Welle allgemein an Interesse. Ihre einzige beherrschbare Anwendung lag in der schnellen Personenkanalschiffahrt, in der eine hohe Geschwindigkeit der Boote wünschenswert war. Durch die Entwicklung der Eisenbahn jedoch verloren die schnellen

Kanalboote an Bedeutung und dadurch auch die solitäre Welle. Sie wurde nur noch ein rein wissenschaftliches Forschungsobjekt ohne direkte Anwendungen. Als in der Theorie unerklärtes hydrodynamisches Phänomen blieb sie jedoch interessant und wurde immer wieder Objekt von Untersuchungen. Deren Ergebnisse jedoch zeigen, daß die Welle über Jahrzehnte nicht besser verstanden werden konnte, als es RUSSELL möglich war. Im Gegenteil, das Niveau seines anschaulichen Verständnisses blieb lange unerreicht. Ein theoretisches Begreifen der solitären Welle war RUSSELL jedoch unmöglich und so wurde den Mathematikern dieser Zeit ein Problem zur Bearbeitung übergeben, das anschaulich gut erklärt und experimentell hervorragend vorbereitet war. In den folgenden Jahrzehnten gab es einige mathematische Erklärungsversuche. Doch einen Durchbruch erfuhr die Theorie der solitären Welle erst 1871 durch BOUSSINESQ. Das Entstehen dieser Theorie kann jedoch nur vor dem Hintergrund einer 50 Jahre währenden und manchmal stockenden, aber nicht abreißenden Diskussion um die Natur der solitären Welle verstanden werden.

## 2.2 Diskussionen über die Natur der solitären Welle

Als RUSSELL sich mit der Erforschung von Wellen beschäftigte, war er damit in Europa keineswegs allein, sondern einer unter vielen. Vielerorts in Großbritannien, Frankreich, Italien und im deutschsprachigen Raum wuchs unabhängig voneinander das Interesse an der Bewegung des Wassers. Und als Folge davon wuchs in dieser Zeit die Zahl der Publikationen zu dem Thema. Die Zahl der wissenschaftlichen Arbeiten, die sich mit Wellen auseinandersetzten, hatte zum Ende der dreißiger Jahre des 19. Jahrhunderts zu wachsen begonnen und erreichte in den Vierzigern einen ersten Höhepunkt [Catalogue 1909]. Untersucht wurden Wellen in verschiedensten Formen: Schiffswellen, Meereswellen, Brandung, Flachwasserwellen, Kapillarwellen u.v.m., aber auch einzelne Wellen wie Gezeiten, Flutwellen in Flüssen, stehende Wellen in Flüssen, Wellen, die sich durch Rückstau eines fließenden Gewässers bilden und eben auch die von RUSSELL erstmals ausführlich beschriebene von ihm so genannte *solitäre Welle*, die nicht wenig Aufmerksamkeit erhielt. RUSSELLs Arbeiten trugen somit zum Wachstum des Interesses an Wellen bei. Dies auch nicht zuletzt durch die mitreißende und klare Art seiner Darstellungen 1836, mit der er die British Association for the Advancement of Science für "sein" Thema begeistern konnte. Später rief die zum Teil harsche Kritik an RUSSELLs Arbeiten zur solitären Welle manche Kommentatoren auf den Plan, die mit Stellungnahmen, mathematischen Herleitungsversuchen oder sogar eigenen Experimenten versuchten, das neue Phänomen zu erklären. Daher gab es in den folgenden Jahrzehnten recht viele Autoren, die sich mit der solitären Wasserwelle auseinandersetzten.

Schaut man RUSSELLs vielfältige Arbeiten zu diesem Thema an, so erheben sich kaum Zweifel an seinen Ergebnissen. Die Haupteigenschaften der solitären Welle sind, wie in seiner Arbeit von 1844 deutlich wird, vielfach überprüft und klar dargestellt. Diese Eigenschaften bedurften nun einer theoretischen Erklärung. Und daß diese zu liefern kein leichtes Unterfangen war, zeigen manche späteren vergeblichen Versuche, die keinen weiterführenden Beitrag zur Erklärung der Welle zu geben vermochten. Solche Schwierigkeiten bei der Erklärung führten auch zu Fehlschlüssen und diese wiederum zu Zweifeln an der Richtigkeit von RUSSELLs Ergebnissen.

Und nicht selten wurden RUSSELLs Arbeiten verurteilt, weil die Eigenschaften der solitären Welle nicht erklärbar schienen. Erschwerend kam hinzu, daß von anderen Wissenschaftlern durchgeführte ähnliche Experimente nicht die gleichen Ergebnisse lieferten wie RUSSELLs Experimente und damit zusätzlich Zweifel an RUSSELLs Ergebnissen aufkommen konnte. Da der Mechanismus der solitären Welle nicht ganz verstanden war, wurden bei Vergleichen zwischen manchen Experimenten wichtige Parameter außer Acht gelassen, wie z.B die Wellenhöhe im Verhältnis zur Wassertiefe. Die Gebrüder WEBER (s.o.) konnten durch eine zu große Wassertiefe in ihrem Becken in einem ansonsten dem Russellschen sehr ähnlichen Versuchsaufbau keine solitäre Welle beobachten. Versuche mit sehr geringer Wassertiefe lieferten dagegen schöne negative solitäre Wellen, wie die des Amerikaners DYAR [Dyar 1843]. Schon 1843 und unabhängig von RUSSELL, wie es scheint, erforschte DYAR die solitäre Welle in einem dem Russellschen sehr ähnlichen Versuchsaufbau: In einer Wanne (3,33m Länge x 16cm Breite) wurde eine positive oder negative solitäre Welle durch schnelles Eintauchen oder Herausziehen eines Gewichtes erzeugt. DYAR nannte die solitäre Welle *onde élevée* bzw. *onde déprimée*. Während es RUSSELL nicht gelungen war, eine negative solitäre Welle ohne oszillatorische Wellen zu erzeugen (s. Abb. 2.7), beschrieb DYAR seine negative Welle als exaktes Gegenbild der positiven. Da die ungleichen Eigenschaften der negativen und positiven solitären Welle RUSSELL als ein wichtiges Kriterium zur Unterscheidung der solitären von anderen Wellen diente, konnte auf diese Weise eine wichtige Eigenschaft der solitären Welle in Frage gestellt werden. DYARs Ergebnisse bei Kollisionsexperimenten stehen sogar im direkten Widerspruch zu RUSSELLs. DYAR beschrieb alle Möglichkeiten der Kollision, des Überholens, mit positiven, negativen oder beiden Arten von Wellen. Immer ist sein Resultat, daß die Wellen nach gegenseitiger Durchdringung unverändert fortlaufen. Bei RUSSELL war die negative Welle von der sie überholenden positiven vernichtet worden. DYAR beschrieb die negative Welle oder *onde déprimée* als gleichwertig der positiven. Weder DYAR noch RUSSELL erkannten, daß für die Stabilität der negativen "solitären" Welle deren Amplitude im Verhältnis zur Wassertiefe maßgeblich ist, worauf KORTEWEG und DE VRIES 1895 aufmerksam machten [KdV 1895]. Je kleiner die Wassertiefe ist, desto weniger oszillatorische Wellen zieht sie hinter sich her.

Der schärfste Angriff gegen RUSSELL erfolgte von GEORGE BIDDELL AIRY (1801-1892). Der durch seine vielen erfolgreichen wissenschaftlichen Aktivitäten sehr geschätzte Königliche Astronom und Direktor des Observatoriums von Greenwich hatte eine lange theoretische Abhandlung zu Gezeiten und Wellen verfaßt [Airy 1845]. In ihr ging er kritisch auf die theoretischen Arbeiten von NEWTON, BERNOULLI, LAPLACE, LAGRANGE und CAUCHY sowie auf die experimentellen Arbeiten der Gebrüder WEBER und RUSSELL ein [Rouse, Ince 1957]. Was RUSSELL betrifft, bezog sich AIRY nur auf dessen Arbeiten bis einschließlich 1840. Da RUSSELL in seiner Arbeit von 1844 auf AIRYs Abhandlung einging (wenn auch nicht namentlich, so doch deutlich genug), ist davon auszugehen, daß AIRYs Abhandlung bis 1844 schon vorgelegen hatte und AIRY keine Gelegenheit hatte, RUSSELLs spätere Ergebnisse zu berücksichtigen. AIRYs Urteil über RUSSELLs Arbeit von 1837 ist nicht eben schmeichelhaft [Airy 1845, S. 345, 350]:

> "... it will be necessary, however, to make some remarks upon Mr. Russell´s references to theory, because we believe that anyone who should derive his first knowledge of the nature of waves from that paper would receive from it a most erroneous notion of the extent of the Theory of Waves at the date of those experiments. ... Meanwhile we shall repeat our opinion of the great value of the experiments which we have abstracted, but we must warn the reader against attaching any importance to the theoretical expressions which are mingled with them

in the original account."

AIRYs Einwände gegen RUSSELLs theoretische Ausführungen sind durchaus begründet. Denn von den wenigen kurzen Rechnungen, die RUSSELL seinen Schlüssen hin und wieder anfügte, sind einige fehlerhaft; die meisten sind verworren und kaum wirklich hilfreich. Doch nur selten drückte RUSSELL seine Ergebnisse mathematisch aus. Seine Stärke lag in der Beobachtung und Beschreibung des Beobachteten. Diese Beobachtungen lieferten ihm eine über Jahrzehnte nicht wieder erreichte Kenntnis über "the nature of waves", zumindest was die solitäre Welle betrifft. An einer anderen Stelle führte AIRY aus [Airy 1845, S. 346]:

"We are not disposed to recognize this wave as deserving the epithets "great" or "primary", ... and we conceive that, ever since it was known that the theory of shallow waves of great length was contained in the equation $\frac{d^2\eta}{dt^2} = gH\frac{d^2\eta}{dx^2}$ ... the theory of the solitary wave has been perfectly well known. ... There is one particular velocity (that defined by the equation $c^2 = gH$) at which a free wave will travel along a canal of given depth H."

AIRY war nicht bereit, in Erwägung zu ziehen, daß die solitäre Welle ein in der Theorie noch unbekanntes Phänomen sein konnte, denn er negierte die von RUSSELL gefundene Geschwindigkeitsformel $c^2 = g(H+h)$, so wie er auch die von RUSSELL gefundene Andersartigkeit der negativen solitären Welle nicht akzeptierte. Seine eigenen theoretischen Erklärungen ließen keinen Raum für eine solitäre und gleichzeitig formstabile Welle. AIRYs Gleichungen konnten nur harmonische Lösungen liefern, die zum einen negative wie positive Wellen gleichwertig behandelten und zum anderen entweder eine solitäre Welle zuließen oder zeitlich unveränderte Wellen, aber niemals beides gleichzeitig. Unter der Annahme kleiner,

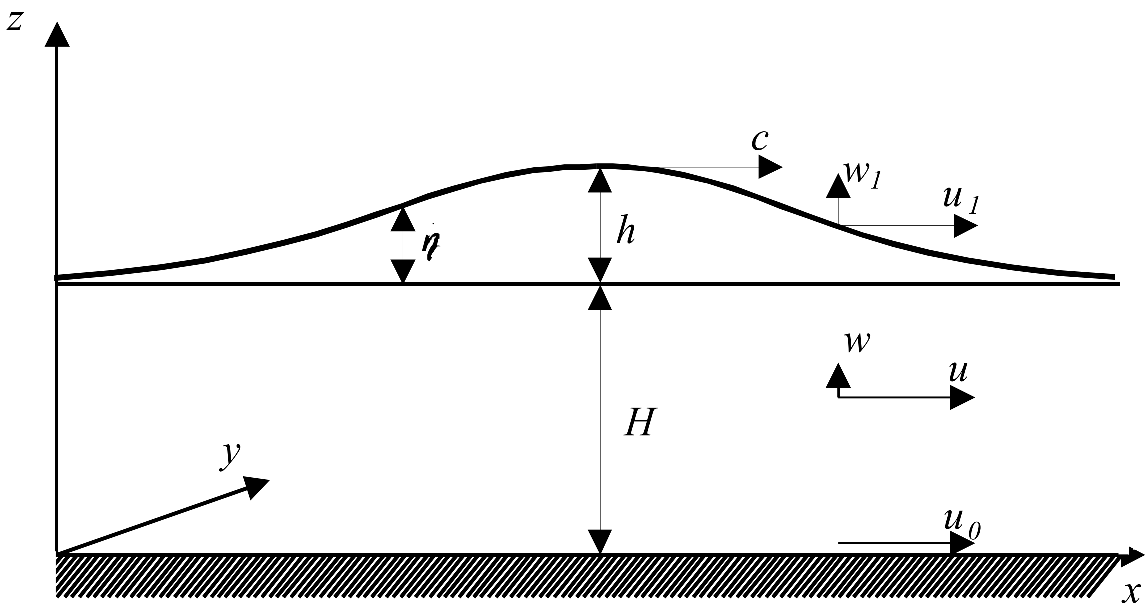


*Abbildung 2.6:*
*Einheitliche Bezeichnungsweise, mit der in diesem Kapitel alle Rechnungen und Ergebnisse der hier behandelten Abhandlungen dargestellt werden:*

*x, y, z:* *rechtwinklige Koordinaten. Die (x,y)-Ebene fällt mit dem Kanalboden zusammen*

*H:* *Wassertiefe des ungestörten Wassers*
*h:* *maximale Höhe der Welle*
*$\eta(x)$:* *Oberfläche der betrachteten Welle*
*c:* *Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle*
*$u(x,z)$, $w(x,z)$: Bewegungsgeschwindigkeiten eines Wassermoleküls am Ort (x,z)*
*$u_1(x,z)$, $w_1(x,z)$:* " *an der Wasseroberfläche*
*$u_0(x,z)$:* " *auf dem Grund*

oszillatorischer Wellen gelangte AIRY zu der Wellengeschwindigkeit[5]

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}H\right) . \tag{2.3}$$

Deren Grenzfälle für sehr kleine bzw. sehr große Wellenlänge $\lambda$ gehen in die seit GERSTNER [Gerstner 1804] bzw. LAGRANGE [Lagrange 1788] bekannten Geschwindigkeiten über:

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \quad \textit{für kleines } \lambda; \qquad c^2 = gH \quad \textit{für großes } \lambda.$$

AIRY versuchte ferner die Bedingungen zu untersuchen, unter denen eine solitäre Welle doch unverändert durch einen Kanal laufen könnte. RUSSELL hatte immer periodische Funktionen für die Form der solitären Welle angegeben, zuerst die Zykloide, dann den "verschobenen Sinus". Das bedingt, daß die Funktion vor und hinter der Welle abgeschnitten wird, damit sie außerhalb der Welle konstant ist. Das war sicherlich kein mathematisch gut durchdachter Ansatz. Doch AIRY, der RUSSELLs mathematische Fähigkeiten so schmähte, tappte nun mit seiner Erklärung der solitären Welle in die gleiche Falle. Er unterstellte, daß eine unverändert laufende und solitäre Welle eine scharfe Begrenzung haben muß, außerhalb derer die Wasseroberfläche auf konstantem Niveau ruht, also die einzelne Welle durch eine diskontinuierliche Funktion beschrieben wird. Ebenso wie RUSSELL hielt es AIRY generell für sinnvoll, auch eine diskontinuierliche Funktion als Linearkombination von Sinusfunktionen zu betrachten. Die Voraussetzung stetiger Anschlußbedingungen an den Rändern der Welle führte AIRY dazu, notwendigerweise eine äußere Kraft einzuführen, die auf die Welle wirkte. Ein gezogener Kahn z.B. könne diese äußere Kraft ausüben und eine einzelne Welle aufrechterhalten, wie AIRY annahm. Ohne eine äußere Kraft, so AIRY, konnte eine freie, einzelne und unveränderte Welle nicht existieren. Im Hinblick auf RUSSELLs Experimente konnte für ihn als einziger Ausweg die Annahme einer im Verhältnis zur Wassertiefe sehr langen Wellenlänge gelten. Das jedoch führte ihn wieder zurück auf die bekannte Geschwindigkeit der Welle $c^2 = gH$. In diesem Falle konnte sich AIRY die einzelne Welle als Linearkombination sehr langwelliger Sinusfunktionen fast gleicher Wellenlänge vorstellen, was eine sehr kleine Dispersion bedeutet hätte. Das von RUSSELL beobachtete langsame Kleinerwerden der solitären Welle interpretierte AIRY dahingehend und faßte es als Bestätigung seiner Theorie auf.

[5] AIRYs Begründungen von Annahmen, die zur Aufstellung der Gleichungen nötig sind, und seine Herleitungen sind recht langatmig und umständlich. Ihre Darstellung wird daher hier nicht wiederholt.

AIRY hatte auch das Brechen von Wellen am Strand beschrieben und war davon ausgegangen, daß ein Aufsteilen der Wellen dadurch stattfand, daß die in der Welle oberen Wassermoleküle schneller in Richtung der Wellenbewegung geworfen wurden als die in der Welle unteren. Schon 1807 war eine ähnlicher Erklärung von YOUNG vorgeschlagen worden [Young 1807]. Nach der Gleichung von LAGRANGE (Gleichung 2.1), wenn für *H* die Höhe des Wassermoleküls über dem Meeresgrund angenommen wird, so erläuterte er, hat die Spitze der Welle eine höhere Geschwindigkeit als die Ränder, so daß die Welle sich aufsteilt und schließlich bricht. Es gelang jedoch im letzten Jahrhundert noch nicht, durch den Effekt des Aufsteilens der Welle die scheinbar unüberwindliche Dispersion einer Summe oszillatorischer Wellen in der Vorstellung auszugleichen und so eine solitäre Welle vorstellbar zu machen.

In seiner Arbeit von 1844 machte RUSSELL deutlich, daß die von ihm gefundene solitäre Welle nicht zu AIRYs Theorie paßte. Er hob hervor, daß er die davon abweichenden Eigenschaften besonders genau überprüft hatte und seine früheren Resultate nur bestätigen konnte:

* Die Geschwindigkeit $c$ der solitären Welle ist gegeben durch $c^2 = g(H+h)$.
* Ihre Amplitude braucht nicht klein zu sein.
* Im künstlichen Kanal ist die Abnahme der Amplitude der Welle so gering, daß sie nicht als Auseinanderlaufen der Welle angesehen werden kann. In Schiffskanälen hängt das Kleinerwerden der Welle signifikant von der Struktur der Kanalränder ab. Das sah RUSSELL als ein deutliches Indiz für Reibungsverluste an.
* Die negative solitäre Welle verhält sich nicht wie die positive, sondern zieht oszillatorische Wellen hinter sich her und dissipiert recht schnell (s. Abb. 2.7).

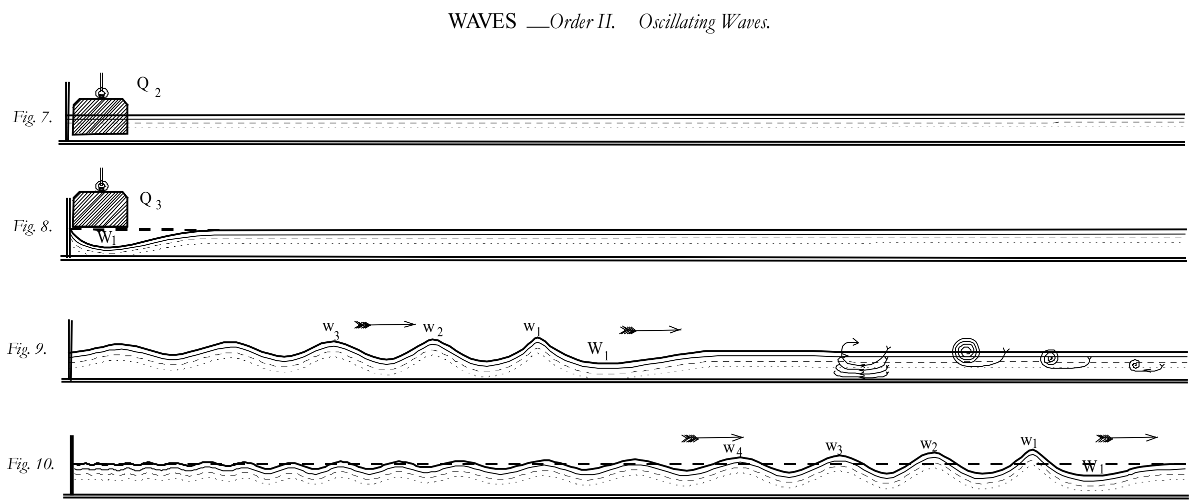


*Abbildung 2.7:*
*Zeichnung aus [Russell 1844]. Die Erzeugung einer negativen Welle (Fig.7, 8). Sie zieht, so RUSSELL, immer oszillatorische Wellen hinter sich her (Fig. 9,10). In Fig. 9 sind die Bewegungen der Wassermoleküle dargestellt.*

Das wichtigste, auch mathematisch am besten greifbare Kriterium zur Zurückweisung von AIRYs Kritik betraf die Geschwindigkeit der Welle. Daher wandte RUSSELL besondere Mühe darauf an, die Geschwindigkeit durch besonders viele und genaue Messungen, die er in Grafiken darstellte, über allen Zweifel erhaben zu machen. Sein besonderes experimentelles Geschick, mit einfachen Mitteln zu optimalen Ergebnissen zu kommen, kann etwa daran ersehen werden, wie er die Geschwindigkeit der solitären Welle vermaß: Er ließ die Welle erst eine Strecke von einigen Metern durch das lange Becken laufen, damit sich anfängliche Störungen, die bei der Erzeugung der Welle auftraten, verliefen. Da die Welle immer wieder an den Beckenenden reflektiert wurde, ließ er sie für eine Meßreihe oft, bei größeren Wellen über hundert Mal, durch das Becken laufen. Bei jedem Durchlauf durch das Becken passierte die Welle einen oder mehrere Beobachterstationen, wo jedes Mal die Zeit genommen wurde. Damit wurde auch die Verringerung der Geschwindigkeit aufgrund der Abnahme der Wellenhöhe gemessen. Der Beobachter fokussierte durch eine Blende das auf der Wasseroberfläche sichtbare Spiegelbild einer hoch über dem Becken angebrachten Kerze. Jede Bewegung der Wasseroberfläche verursachte so eine starke Bewegung des Reflexes der Kerze für den Beobachter. Auf diese Weise konnte der Durchgang eines Wellenscheitels einer sogar ohne Hilfsmittel nicht mehr erkennbaren Welle mit einer Höhe unter einem Millimeter mit großer Genauigkeit gestoppt werden [Russell 1837b].

Nachdem RUSSELL auf diese Weise AIRYs Kritik zurückweisen konnte, waren wesentliche Fragen zur Theorie der solitären Welle weiterhin offen. Lediglich die Atmosphäre, in der diskutiert wurde, war nun angespannt [Emerson 1977]. RUSSELL zog sich aus dieser Diskussion zurück. Unabhängig von der später weiterhin auftretenden Kritik lehrte er seine Einsichten als Antworten auf manche offenen Fragen des Schiffbaus [Russell 1865].

Die Diskussion um RUSSELLs solitäre Welle ging jedoch unvermindert weiter. Im Jahre 1845 wählte der englische Mathematiker S. EARNSHAW den Ansatz $u = u(x\text{-}ct)$, um die solitäre Welle zu beschreiben. RUSSELL hatte beobachtet, daß ein senkrecht im Wasser hängender Faden beim Passieren einer solitären Welle senkrecht blieb; er hatte daher $u(x)$ unabhängig von $z$ angenommen. EARNSHAW schienen die Unveränderlichkeit der Wellenform und die Annahme $u$ unabhängig von $z$ abgesicherte experimentellen Fakten zu sein, die als Grundlage eines mathematischen Ansatzes dienen konnten [Earnshaw 1849]. Mit der Beobachtung $u = u(x\text{-}ct)$ und der Vorstellung einer diskontinuierlichen Funktion für die Form der solitären Welle hatte RUSSELL unbewußt eine Falle ausgelegt, die erst Lord RAYLEIGH 1876 zu erkennen imstande war [Rayleigh 1876]: $u = u(x)$ kann die Laplace-Gleichung (2.8) nicht erfüllen, also ist eine solche Bewegung nicht wirbelfrei. Mit einer von einem Geschwindigkeitspotential ausgehenden Bewegungsgleichung kann die Rotation nicht beeinflußt werden, sie bleibt konstant. Da das ruhende Wasser vor und hinter der Welle jedoch wirbelfrei ist, muß mit $u = u(x)$ eine Diskontinuität vor und hinter der Welle auftreteten. Damit waren die Bedingungen $u = u(x\text{-}ct)$ und $\eta$ = diskontinuierliche Funktion konsistent und schienen sich gegenseitig zu rechtfertigen. In diese Falle tappte nun auch EARNSHAW, der nach einigen Rechnungen zu einer etwas unübersichtlichen Form der solitären Welle kam:

$$C_1\eta^2 - 2g\eta = \frac{c^2 H^2}{4(H+h)^2}\cosh^2(x-ct) + C_2 \ .$$

Diese Formel veranlaßte EARNSHAW zu der grotesk erscheinenden Anschauung, die Welle als abgeschnittenen, umgedrehten $\cosh^2$-Bogen inmitten des ansonsten ruhenden Wassers zu betrachten.

Bei diesem Stand der Diskussion meldete sich eine weitere Größe unter den englischen Naturwissenschaftlern zu dem Thema zu Wort. GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903) verfasste einen Review-Artikel [Stokes 1846], in dem er die bekannten Ergebnisse der Theorie der Wasserwellen kurz zusammenfasste. Auch RUSSELLs Ergebnisse streifte STOKES, jedoch in einer irreführenden Weise, da er versuchte, die Theorie der solitären Welle in die der langen Wellen einzubinden. Es scheint, als ob STOKES diese Einbindung als die einzige Möglichkeit ansah, die solitäre Welle theoretisch zu beschreiben. Denn obwohl er andere Lösungsansätze suchte - die auf Diskontinuitäten führenden Lösungsansätze AIRYs und EARNSHAWs wies er als unakzeptabel zurück - kam STOKES immer wieder auf die Degradierung der Wellenhöhe zurück, die er als Dispersion zu interpretieren suchte. Auch gab STOKES an, daß die Ergebnisse der Russellschen Experimente die Geschwindigkeitsbeziehung für lange Wellen $c = (gH)^{1/2}$ bestätigten. Diese für vernachlässigbare Wellenhöhe ja zutreffende Bemerkung verdeckte ganz den außergewöhnlichen Charakter der solitären Welle. Obwohl STOKES Zusammenfassung belegt, daß er RUSSELLs Ergebnisse gut studiert haben muß, scheint er die Besonderheiten der solitären Welle schlicht nicht akzeptiert zu haben. In diesem Sinne schloß er den Abschnitt zur solitären Wellen, indem er bemerkte [Stokes 1846, S. 9]:

> "It is the opinion of Mr. Russell that the solitary wave is a phenomenon *sui generis* in nowise deriving its character from the circumstances of the generation of the wave. His experiments seem to render this conclusion probable. Should it be correct the analytical character of the solitary wave remains to be discovered".

Es scheint hier zunächst, daß STOKES die Suche nach einer eigenständigen Theorie für die solitäre Welle noch nicht aufgegeben hatte. Die direkt anschließende Bemerkung offenbart jedoch, daß er sich recht sicher damit war, daß die solitäre Welle in die Theorie der langen Wellen einzuordnen sei:

> "A complete theory of this wave should give, not only the velocity of propagation, but also the law of its degradation, at least of that part of degradation which is independent of friction, which is probably the greater part. With respect to the importance of this peculiar wave however, it must be remarked that the term *solitary wave* as so defined, must not be extended to the tide wave, which is nothing more (as far as regards the laws of its propagation) than a very long wave of which the form may be arbitrary."

Hiermit zeigte STOKES seine ganze Ablehnung gegenüber RUSSELLs Theorie. Denn zum einen verliert eine dispersive solitäre Welle gänzlich ihren besonderen Charakter und zum anderen beschrieb RUSSELL den Charakter der Gezeitenwelle nicht mit ihrer Geschwindigkeit, die genau mit der Theorie der langen Wellen übereinstimmt, sondern mit ihrer Dispersionsfreiheit gepaart mit dem einzelnen Auftreten.

Ein Jahr später bekräftigte STOKES seine Ablehnung der Besonderheiten der solitären Wellen in einer Abhandlung über oszillatorische Wellen [Stokes 1847]. Es erscheint zuerst widersinnig, die solitäre Welle in einer Arbeit über oszillatorische Wellen behandeln zu wollen, doch STOKES zeigte sich im Verlaufe dieser Arbeit sicher, daß die solitäre Welle mit oszillatorischen Wellen beschreibbar sei. Obwohl er damit in die Irre ging, ist sein Beitrag dennoch in zweifacher Hinsicht erwähnenswert: STOKES Ansatz führt ein Stück weit in die Richtung der *cnoidalen Wellen*, die auch periodisch sind, jedoch für $\lambda \to \infty$ in die $\mathrm{sech}^2$-Form der Ein-Solitonenlösung der KdV-Gleichung übergehen. Außerdem wird die Arbeit als der historische Beginn des Studiums nichtlinearer Wellen bezeichnet [Dea., Dal. 1984], [Whitham 1974]. STOKES war bestrebt, eine möglichst allgemeingültige Lösung zu erhalten. Daher versuchte er, die in den grundlegenden Gleichungen auftretenden nichtlinearen Terme soweit wie möglich zu berücksichtigen. Sein Ansatz beruht darauf, ebene, formstabile Wellen zu betrachten, bei denen für das Geschwindigkeitspotential $\varphi$ gilt

$$\phi = f(x - ct, z) \ .$$

Damit kann in der Bernoulli-Gleichung

$$p = \rho g \eta - \rho \phi_t - \frac{\rho}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) \tag{2.4}$$

die Zeitabhängigkeit eliminiert werden und es bleibt

$$p = \rho g \eta + c\rho \phi_x - \frac{\rho}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) \ . \tag{2.5}$$

Weiter setzte STOKES als Randbedingung, daß die freie Oberfläche der Flüssigkeit während der Wellenbewegung als solche erhalten bleibt. Für die Beschreibung dieses Umstands wählte STOKES als Variable nicht die Oberfläche $\eta$, was ihn zu der heute üblichen Gleichung (2.14) geführt hätte, sondern p(x,z) an der Stelle p = 0. Dies führt zu der Gleichung

$$p_t + \phi_x p_x = \phi_z p_z \, . \tag{2.6}$$

Der Druck p aus Gleichung (2.5) und $p_t = -c\, p_x$ in Gleichung (2.6) eingesetzt liefert

$$g\phi_z - c^2\phi_{xx} + 2c(\phi_x\phi_{xx} + \phi_z\phi_{zx}) - \phi_x^2\phi_{xx} - 2\phi_x\phi_z\phi_{xz} - \phi_z^2\phi_{zz} = 0 \ . \tag{2.7}$$

Diese, bis hierher noch exakte, Gleichung diente STOKES als Ausgangspunkt für seine weiteren Rechnungen. Hierbei beschränkte er sich nicht, wie damals üblich, nur auf die einfachsten Terme, sondern berücksichtigte auch die in $\varphi$ quadratischen Terme in der Klammer von Gleichung (2.7). STOKES hier folgende, längere Rechnungen werden in [Bullough 1988] diskutiert und es bleibt hier, auf die Ergebnisse und STOKES Folgerungen einzugehen. Aus der Laplace-Gleichung, die aus der von STOKES angenommenen Inkompressibilität und Wirbelfreiheit des Wassers folgt

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0. \tag{2.8}$$

STOKES legte periodische Randbedingungen fest und suchte die allgemeine Lösung für $\varphi$ durch Bedingungen einzuschränken. Er entwickelte $\varphi$ in eine Reihe, deren Konvergenz von verschiedenen Kriterien abhing. Das Ergebnis für $\varphi$ wiederum eingesetzt in die Bernoulli-Gleichung (2.5) für die freie Wasseroberfläche lieferte ihm eine Lösung für $\eta$. In einer ersten Näherung gelangte Stokes auf diesem Wege zu

$$\eta = -\frac{2mAc}{g}\cosh mH \cos mx \tag{2.9}$$

mit $m = 2\pi/\lambda$ und $A$ = Konstante. Die von STOKES für diese Näherung gefundene Wellengeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{g}{m} \tanh mh \ , \tag{2.10}$$

entspricht AIRYs Resultat (2.3) für lange Flachwasserwellen. In einer zweiten Näherung setzte STOKES sein erstes Resultat für $\varphi$ in die quadratischen Terme der Gleichung (2.7) ein. Mit dieser Gleichung kam er zu der Form der Wasseroberfläche

$$\eta = H\, a \cos mx - K\, (H\, a\,)^2 \cos 2mx$$

mit $a$, $K$ = Konstanten. Diese Gleichung stellt für kleine $mH$ die ersten zwei Terme der Fourierentwicklung der $cn^2$-Funktion dar, worauf KORTEWEG und de VRIES 1895 hinwiesen. Stokes hatte allerdings periodische Randbedingungen angenommen, und konnte somit von $cn^2$ nicht zu $sech^2$ kommen.

Die periodische Form der Wellenbewegung wurde von STOKES unter den angenommenen Randbedingungen für die einzig mögliche Bewegung gehalten. Das brachte ihn dazu, einen Kommentar zu RUSSELLs Arbeiten anzufügen. Er bemerkte, wie auch schon AIRY vor ihm, daß eine Form wie Gleichung (2.9) keine gleichförmig bewegte und gleichzeitig solitäre Welle hervorbringen kann. Die von RUSSELL beobachtete Abnahme der solitären Welle sah er deshalb wie AIRY als für diese charakteristisch an. STOKES Argumentation enthält jedoch zwei Fehler. Zum einen war er wie AIRY in seinem Ansatz für $\varphi$ als Lösung der Laplace-Gleichung von oszillatorischen Wellen ausgegangen. Das schien ihm von vorn herein unausweichlich zu sein. Zum anderen war er von sehr langen Wellen und später sogar von $\lambda \gg H$ ausgegangen, was für solitäre Wellen nicht zutreffen muß. Die solitäre Welle betrachtend, bemerkte er dazu, daß seine Näherung für sehr kleine solitäre Wellen gelte. Und wenn diese somit der Gleichung (2.9) folgten, so müßten es auch die großen solitären Wellen tun, die sich damit nicht unverändert bewegen könnten. Auf den Fehler dieses Gedankengangs kam STOKES etwa 1880 [Stokes 1891]: Kleine solitäre Wellen konnten eben auch mit sehr langen Wellen der Form (2.9) *angenähert* werden, die nur sehr wenig dispersiv sind. Für große solitäre Wellen gilt dies jedoch nicht.

Vielleicht war STOKES mit seiner "Lösung" des Russellschen Problems selber nicht zufrieden. Denn zwei Jahre später versuchte STOKES mit einem völlig anderen Ansatz zu einer der solitären Welle nahekommenden mathematischen Beschreibung zu gelangen [Stokes 1849]. RUSSELLs Beobachtung des senkrecht im Wasser hängenbleibenden Fadens beim Passsieren einer solitären Welle griff STOKES auf und setzte wie EARNSHAW explizit $u = u(x)$. Diese Näherung führt jedoch wieder zu der Geschwindigkeit der Welle von LAGRANGE (2.1). STOKES schien sich in einem Zwiespalt zu befinden. Einerseits legt die Weise, wie er RUSSELL zitierte und einige seiner Ergebnisse verwendete, um eigene Rechnungen auf ihnen aufzubauen oder eigene Ergebnisse zu bestätigen, nahe, daß er RUSSELLs Bericht von 1844 schätzte. Andererseits konnte er mit seinen, ihm allgemein scheinenden Ergebnissen die solitäre Welle nicht erklären. Ein Grund hierfür, die Näherung durch lange Wellen, schien ihm bewußt zu sein, wie der Abschluß seiner Betrachtung zeigt [Stokes 1849, S. 228]:

> "...in the case of a solitary wave artificially excited in a canal ... it appears to be necessary to take account of the finite length, as well as finite hight of the wave."

Es scheint, als ob STOKES das Problem der solitären Welle über Jahrzehnte nicht vergessen konnte. Denn er kam etwa 1880, also etwa 34 Jahre nach seiner ersten Arbeit zur solitären Welle, beim Nachdenken über Wellen auf seinen oben beschriebenen zweiten Fehler [Stokes 1891]. Als er LORD RAYLEIGH auf das Problem ansprach, machte dieser ihn auf seine eigene Arbeit zu solitären Wellen aufmerksam [Rayleigh 1876], womit nun STOKES wußte, daß es solitäre Wellen geben konnte. Seinen ersten Fehler hatte STOKES zu diesem Zeitpunkt noch nicht erkannt und versuchte, mit einer "trial-and-error-Methode" den Umständen der solitären Welle auf die Spur zu kommen [Stokes 1883, 1891].

Weitere Versuche, mit dem Earnshawschen Ansatz zu einer Beschreibung der solitären Welle zu gelangen, unternahm ANDREW ROBERTSON [Robertson 1850, 1851, 1852], der zu einer der Russellschen Angabe in der Form ähnlichen Wellengeschwindigkeit gelangte, nämlich

$$c^2 = g(H+2h)\frac{H+2h}{H+h} .$$

Bei der mathematischen Beschreibung physikalischer Phänomene hingen die britischen Naturwissenschaftler stark an ihren Vorstellungen über die Dinge [Cros., Smith 1978]. Dienten diese als Grundlage für mathematische Ansätze, so konnten Fehler in den Annahmen zu mathematischen Schwierigkeiten führen: RUSSELL wie AIRY hatten a priori angenommen, daß eine Welle mit einer Sinusfunktion verknüpft sein müsse und waren damit in die Irre gelaufen. Ebenso hartnäckig hielt sich die Vorstellung von der diskontinuierlichen Funktion für die solitäre Welle, der u.a. RUSSELL, AIRY und EARNSHAW anhingen. Erst durch die Assimilation französischer analytischer Techniken konnte sich die britische Mathematische Physik von diesem Denkansatz lösen und weiterentwickeln [Wise 1981]. Doch dieser Vorgang war langwierig.

Im deutschsprachigen Raum wurde in diesen Jahrzehnten so gut wie gar nicht auf die Entdeckung der solitären Welle eingegangen. Lediglich GOTTHILF HAGEN (1797 - 1884), der in einer Abhandlung "Über Wellen auf Gewässern von gleichmäßiger Tiefe" [Hagen 1861] oszillatorische Wellen untersuchte, verglich RUSSELLs Ergebnisse mit seinen eigenen. Da HAGEN jedoch a priori davon ausging, daß es einzelne Wellen ohne nachfolgende oszillatorische Wellen nicht geben konnte, stellte er die Zuverlässigkeit von RUSSELLs Forschungen in Abrede. HAGENs Urteil über RUSSELLs Arbeit fiel vernichtend aus: Die Abweichungen in den Eigenschaften der solitären Welle im Vergleich zu oszillatorischen Wellen begründete HAGEN mit Fehlern und Unzuverlässigkeiten in RUSSELLs Arbeiten. Auch die von der Wellenamplitude abhängige Wellengeschwindigkeit zweifelte HAGEN an und kritisierte Einzelheiten an der Russellschen Meßapparatur.

In Frankreich wurden die britischen Forschungsergebnisse zur solitären Wasserwelle sehr schnell aufgenommen und diskutiert. Über seine Arbeiten hatte RUSSELL im Jahre 1837 je einen ausführlichen Bericht in England [Russell 1837b] und Schottland [Russell 1840a] vorgelegt. Der schottische Bericht wurde zwar erst 1840 gedruckt, war jedoch schon 1837 als Bericht von einem Korrespondenten der "Annales des Ponts et Chaussées" nach Frankreich gebracht worden. Dieser Bericht wurde noch im selben Jahr übersetzt und mit allen Tabellen und Zeichnungen in den Annales abgedruckt [Russell 1837c]. Denn in Frankreich hatte man auch schon das Phänomen der abnehmenden Reibung bei höheren Geschwindigkeiten bei Kanalbooten beobachtet und maß daher RUSSELLs Forschungen große Bedeutung zu [Russell 1837c, S. 143 Fußnote].

Die erste Reaktion auf diesen Artikel in den "Annales" kam von ANATOLE DE CALIGNY (1811 - 1892), der sich mit Wasserhebern beschäftigt hatte und eigene Erfahrungen in RUSSELLs Experimenten wiederfand. Doch die Art, mit der er ab 1842 mit recht vielen kleinen Veröffentlichungen zu Wellenbewegungen die französische Wissenschaft in die Ergebnisse seiner Experimente zur solitären Welle einzuführen versuchte, taugte mehr zur Verwirrung als zur Erklärung des Phänomens [Caligny 1842-72, 1843, 1844, 1848, 1866]. In seiner Arbeit von 1844 z.B. trennte CALIGNY die solitäre Welle in zwei *unabhängige* Phänomene: Als *onde solitaire* bezeichnete er die Welle, die durch Hinzufügen einer Menge Wassers an einem Ende des Versuchsbeckens entsteht und dann unverändert duch das Becken läuft. Als *onde de translation* hingegen bezeichnete er die sich vor einem gezogenen Kahn ausbildende Welle. Damit stieß er in das gleiche Horn wie AIRY - wahrscheinlich ohne dessen Arbeit [Airy 1845] zu kennen - der behauptet hatte, daß nur eine äußere Kraft wie z.B. ein Kahn eine einzelne und unveränderte Welle aufrecht erhalten konnte. CALIGNY schilderte eigene Versuche mit der *onde de translation*, die Zweifel an den Gesetzen der *onde solitaire* aufkommen ließen, so CALIGNY. Durch dieses Vermischen der Phänomene kämen in der englischen Literatur die Meinungsverschiedenheiten über die Geschwindigkeit der Wellen zustande. CALIGNY versicherte aus eigenen Versuchen, daß für eine *onde solitaire* $c^2 = gH$ gilt. Bei der *onde de translation* hingegen sei $c$ auch von dem sie erzeugenden Boot oder sonstigen Gegenstand abhängig. Je größer der Gegenstand sei, desto schneller sei die Welle. Damit widersprach er RUSSELLs Aussagen direkt. Daß der die Welle erzeugende Gegenstand Einfluß auf die Wellenhöhe hat und diese wiederum auf die Wellengeschwindigkeit, scheint CALIGNY nicht bemerkt zu haben. Auch in seinen späteren Arbeiten zur solitären Welle schaffte CALIGNY nicht wesentlich mehr Klarheit, wenngleich er auch nun die solitäre Welle und Translationswelle als *ein* Phänomen ansah. Immer wieder zitierte er RUSSELL und brachte eigene Beobachtungen mit dessen Ergebnissen in Verbindung. Doch da er u.a. die Bewegung der Wassermoleküle innerhalb der solitären Welle mit deren Bewegung in oszillatorischen Flachwasserwellen verglich, kam er zu einigen Widersprüchen. CALIGNY machte qualitative Beobachtungen und so gut wie keine Messungen. Daher konnte er nie mit der Genauigkeit der Russellschen Studien konkurrieren, die er zitierte. Seine Arbeiten können eher als ein Aufmerksammachen auf die solitäre Welle und auf RUSSELLs Arbeiten in Frankreich gewertet werden.

Wesentlich genauer ging HENRI EMILE BAZIN (1829-1917) auf RUSSELLs Experimente ein [Bazin 1852, 1865]. Im Jahre 1859 machte er eigene Experimente zur solitären Welle in einem Teilstück des Canal du Bourgogne bei Dijon sowie in einem flachen, langen Graben daneben. In beiden Gewässern erzeugte er durch Hinzufügen einer größeren Menge Wasser aus Schleusen eine positive solitäre Welle und durch Entfernen einer Menge Wasser durch eine Schleuse eine negative solitäre Welle. Die Ergebnisse seiner Versuche stimmen bis auf ihre wesentlich geringere Genauigkeit mit denen von RUSSELL überein. Daher anerkannte BAZIN ohne Umschweife RUSSELLs Arbeiten und bezeichnete ihn als einen befähigten Experimentator. BAZIN führte seit 1855 Studien zum Fluß von Wasser in Röhren und Kanälen von HENRY PHILIBERT GASPARD DARCY (1803-1858) fort und sein Forschungsschwerpunkt war die Reibung von strömenden Gewässern [Rouse, Ince 1857]. Die Untersuchung von Wellen in Kanälen mit und ohne Strömung, insbesondere der solitären Welle und der Flutwelle, bildete nur ein Nebengebiet seiner Forschungen. Neue wesentliche Erkenntnisse über die solitäre Welle vermochte BAZIN mit seinen Experimenten nicht zu gewinnen und an einem theoretischen Erklärungsansatz seiner Ergebnisse mangelte es ganz, so daß BAZINSs Versuche als eine Bestätigung der Russellschen experimentellen Arbeiten gesehen werden können.

## 2.3 Mathematische Beschreibungen der solitären Welle

Der erste Mathematiker, der das Problem der solitären Welle mit einem fundierten mathematischen Ansatz anging, war ein Franzose: VALENTIN JOSEPH BOUSSINESQ (1842-1929) . In seinem bedeutendsten Werk zur Hydraulik, dem 700 Seiten starken "Essai sur la théorie des eaux courantes" [Boussinesq 1877], behandelte er systematisch fließende Gewässer in Kanälen und Röhren. Hier finden sich auch frühere Veröffentlichungen von BOUSSINESQ zur solitären Welle zusammengefaßt. Diese früheren Arbeiten zur solitären Wasserwelle sind von BOUSSINESQ sehr schnell hintereinander veröffentlicht worden und bauen z.T. aufeinander auf [Boussinesq 1871a, b, 1872, 1873]. Das Ziel dieser Arbeiten machte er mit dem ersten Satz der ersten Arbeit deutlich [Boussinesq 1871a, S. 755] (Übersetzung des Autors):

> "Ich nehme mir vor, theoretisch die Gesetze der von J. Scott Russell und M. Bazin beobachteten Wellen in Kanälen zu begründen ..."

BOUSSINESQs Abhandlungen beantworteten viele damalige Fragen zur Existenz und zu den Eigenschaften der solitären Wasserwelle. Es gelang ihm, die Gesetze der solitären Welle in Gleichungen zu fassen; nämlich in eine partielle Differentialgleichung, die heute nach ihm benannte Boussinesq-Gleichung, in einen Ausdruck für die Form der Welle, eine Lösung der Boussinesq-Gleichung und in einen Ausdruck für die lange diskutierte Geschwindigkeit der solitären Welle, welcher RUSSELLs Versuchsergebnisse exakt bestätigte. Auch weitere Eigenschaften der solitären Welle beschrieb BOUSSINESQ in einer eingehenden Untersuchung der Boussinesq-Gleichung. Der Erfolg seiner Rechnungen liegt im Ansatz begründet. Er verband die bekannten hydrodynamischen Gesetze mit den experimentell gefundenen Eigenschaften der solitären Welle.

BOUSSINESQ untersuchte in seinen vier oben erwähnten Arbeiten Wellen mit der besonderen, von RUSSELL und BAZIN erwähnten Eigenschaft: Sie sollten eine nicht zu vernachlässigende vertikale Bewegung auf die Wassermoleküle übertragen und ferner eine horizontale Bewegung, die nur in erster Näherung unabhängig von $z$ ist. Diese Forderungen gehen über die von LAGRANGE gestellten Bedingungen an sehr lange Wellen hinaus, der die vertikale Bewegung vernachlässigt hatte. Und sie lassen eine z-Abhängigkeit der horizontalen Bewegung zu, wovon EARNSHAW und STOKES abgesehen hatten. BOUSSINESQs Forderungen lassen umfangreichere Beschreibungen zu als nur die der formstabilen, solitären Wellen. Während BOUSSINESQ in seiner ersten Arbeit zu diesem Thema [Boussinesq 1871a] sich nur auf die formstabilen Wellen dieses Typs beschränkte, verallgemeinerte er in seiner zweiten Arbeit [Boussinesq 1871b] den Ansatz, der nun mehr als nur die solitäre Welle einschloß. Die dritte Arbeit [Boussinesq 1872] wiederholt die zweite in einer ausführlicheren Form und schließt weiterführende Betrachtungen an. Die vierte Arbeit schließlich [Boussinesq 1873] ist ein kurzer Anhang zur dritten.

Die Grundzüge von BOUSSINESQs Weg zur heute nach ihm benannten Gleichung seien hier kurz skizziert, da sie bei den später folgenden Betrachtungen der Abhandlungen von RAYLEIGH und von KORTEWEG und DE VRIES als Grundlage dienen sollen. In seinem allgemeinen Ansatz stellte BOUSSINESQ die Forderung nach Formkonstanz - mithin also auch der Konstanz der Geschwindigkeit - der Welle nicht! Es sollte nur *u(x,z) wenig* von *z* abhängig sein, d.h. $\lambda > H$, ferner $H > h$ und $u_x$ klein gegen $u$.

Aus $u = \varphi_x$ und $w = \varphi_z$ und der Laplace-Gleichung $w_z = -u_x$ folgt

$$w = -\int u_x \, dz + f(x) \; . \tag{2.11}$$

Wegen der Bedingung $w = 0$ für $z = 0$ kann f(x) = 0 gesetzt werden. Wegen $\varphi_{xz} = \varphi_{zx}$ bzw. $u_z = v_x$ ergibt sich

$$u = u_0 + \int w_x \, dz \; . \tag{2.12}$$

Als erste Näherung kann von $u = u_0(x)$ ausgegangen werden. $u = u_0(x)$ eingesetzt in Gleichung (2.11) liefert ein erstes Ergebnis für $w(x,z)$, welches in Gleichung (2.12) eingesetzt liefert:

$$u = u_0 + \frac{1}{2} u_{0_{xx}} z^2 \; .$$

Durch Einsetzen dieses Resultats in Gleichung (2.11) und dies wieder in Gleichung (2.12) usw. ergibt sich für $u$ eine Reihenenwicklung. Für φ folgt daraus

$$\phi = -\int u_0 \, dx - \frac{1}{2!} u_{0_x} z^2 + \frac{1}{4!} u_{0_{3x}} z^4 - \frac{1}{6!} u_{0_{5x}} z^6 + \ldots \; . \tag{2.13}$$

Für die Geschwindigkeiten $u_1$ und $w_1$ eines Teilchens an der Wasseroberfläche folgt aus der Bernoulli-Gleichung (2.4) die Gleichung

$$g\eta - \phi_t - \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) = 0 \; .$$

Als Bedingung für die freie Oberfläche erhielt BOUSSINESQ die Relation

$$w_1 = \eta_t + u_1 \eta_x \; . \tag{2.14}$$

Sie ist heute als *Kinematic Free Surface Boundary Condition (KFBSC)* bekannt [Dea., Dal. 1984]. Einsetzen von Gleichung (2.13) in die Bernoulli-Gleichung für die Wasseroberfläche und in (2.14) liefert

$$g\eta - \int u_{0_t} \, dx - \frac{1}{2}(H+\eta)^2 \; u_{0_{xt}} + \frac{1}{2}\left[\left(u_0 - \frac{(H+\eta)^2}{2} u_{0_{xx}} + \ldots\right)^2 + (-(H+\eta)u_x + \ldots)^2\right] = 0 \; (2.15$$

und

$$-(H+\eta)u_{0_x} + \frac{(H+\eta)^3}{6} u_{0_{3x}} \ldots = \eta_t + \eta_x \left(u_0 - \frac{(H+\eta)^2}{2} u_{0_{xx}} + \ldots\right). \tag{2.15b}$$

Aus diesen Gleichungen folgt in erster Näherung

$$g\eta = \int u_{0_t}\, dx \qquad \text{und} \qquad -\mathrm{H}\, u_{0_x} = \eta_t$$

und daraus

$$\eta_{tt} = gH\, \eta_{xx} \qquad \text{und} \qquad u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}}\, \eta \; . \tag{2.16}$$

Die erste Gleichung von (2.16) ist wieder die bekannte d´Alembertsche Gleichung. In einer zweiten Näherung werden die jeweils nächsthöheren Terme aus den Gleichungen (2.15 a, b) mit berücksichtigt:

$$g\eta - \int u_{0_t}\, dx - \frac{1}{2}(H+0)^2\, u_{0_{xt}} + \frac{1}{2} u_0^2 = 0$$

und

$$-(H+0)\, u_{0_x} + \frac{(H+0)^3}{6}\, u_{0_{3x}} = \eta_t + \eta_x\, u_0 \; .$$

Die kleinen Terme werden durch die Ergebnisse von (2.16) genähert. Aus den dabei entstehenden Gleichungen folgt nun die Boussinesq-Gleichung:

$$\eta_{tt} = gH \left( \eta + \frac{3}{2}\frac{\eta^2}{H} + \frac{H^2}{3}\eta_{xx} \right)_{xx} \; . \tag{2.17}$$

Diese Gleichung machte BOUSSINESQ im folgenden zum Ausgangspunkt seiner ausführlichen Untersuchungen. Von ihr gelangte er mit den gleichen Näherungen (2.16), die ihn zur Boussinesq-Gleichung geführt hatten, zu der Geschwindigkeit der Welle

$$c = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3\eta}{4H} + \frac{H^2}{6\eta}\eta_{xx} \right) . \tag{2.18}$$

*c* ist hier keine Konstante, sondern erlaubt - wie auch die Boussinesq-Gleichung selber - eine Formveränderung der Welle mit der Zeit. Implizit steckt in dem Schritt von (2.17) nach (2.18) auch die Korteweg-de Vries-Gleichung (KdV-Gleichung) selber, denn mit der Näherung (2.16)

$$\eta_t = \sqrt{gH}\, \eta_x = c\, \eta_x = (c\, \eta)_x$$

folgt aus Gleichung (2.18) die KdV-Gleichung, wenn auch nur für Wellen in einer Richtung

$$\eta_t = \sqrt{gH}\left(\eta + \frac{3}{4}\frac{\eta^2}{H} + \frac{H^2}{6}\eta_{xx}\right)_x .$$

Doch diesen Schritt zu einer neuen Gleichung tat BOUSSINESQ nicht.

Aus der Boussinesq-Gleichung bestimmte BOUSSINESQ die Geschwindigkeiten *u(x,z)* und *w(x,z)* eines Wassermoleküls. Ferner bestimmte er die Lage des Massenschwerpunkts der Welle und, daß seine Höhe über dem Niveau des ungestören Wassers sowie dessen Geschwindigkeit konstant ist. Erst nach der Beschreibung dieser Eigenschaften, die allen der Boussinesq-Gleichung gehorchenden Wellen zu eigen sind, wandte sich BOUSSINESQ dem Spezialfall zu, daß die Form der Welle zeitlich konstant sein solle. Diese explizite Forderung erst führte zur konstanten Wellengeschwindigkeit $c^2 = g(H+h)$. Der Vergleich dieser Geschwindigkeit mit Gleichung (2.18) führte BOUSSINESQ zur Gleichung

$$\eta_{xx} = \frac{3\eta}{2H^3}(2h - 3\eta)\,, \tag{2.19}$$

deren Integration ihn schließlich zu der heute bekannten Ein-Solitonenlösung für die Form der Wasseroberfläche führte (vgl. Abb. 2.8)

$$\eta = h\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{3\mathrm{h}}{4\mathrm{H}^3}}\,(\mathrm{x} - \mathrm{ct}) \ . \tag{2.20}$$

Zu dieser Lösung war BOUSSINESQ in seiner ersten Arbeit, in der er nur zeitlich konstante Wellen betrachtet hatte, schneller und auch ohne den Umweg über die allgemeinere Boussinesq-Gleichung gekommen. Doch die Boussinesq-Gleichung erlaubte es ihm nun, die zeitlich konstante solitäre Welle als Spezialfall einer allgemeineren Form von Wellen zu betrachten und damit weitgehender zu charakterisieren. So berechnete BOUSSINESQ eine Größe *M*, die er *moment d´instabilité* nannte, und die die Schnelligkeit beschreibt, mit der eine Welle ihre Form verändert. Er bewies, daß von allen Wellen gleicher Energie, die der Boussinesq-Gleichung gehorchen, RUSSELLs solitäre Welle die Welle mit der kleinstmöglichem Instabilität *M* ist. Und daß sie sogar Störungen aus ihrer Form des Gleichgewichts, also Auslenkungen aus der Form (2.20), kompensieren kann, indem sie um diese Gleichgewichtsform oszilliert. Daher - so BOUSSINESQ - sei es so einfach, eine solitäre Welle zu erzeugen, die sich aus einem evtl. sogar turbulenten Anfangszustand von alleine zu einer stabilen Form entwickeln kann. Und ihre Eigenschaften seien daher auch unabhängig von der Art ihrer Erzeugung, eine weitere Einsicht RUSSELLs, die BOUSSINESQ explizit bestätigte[6].

---

[6] Die Arbeit von Miles [Miles 1981] geht besonders auf die Arbeiten von BOUSSINESQ ein, weil sie so oft übersehen wurden. In ihr findet sich auch eine ähnliche Beschreibung der Rechnungen BOUSSINESQs und eine ausführlichere Darstellung von BOUSSINESQs Herleitung des Volumens, der Energie und Stabilität der Welle als Integralinvarianten.

Profil d´une onde solitaire

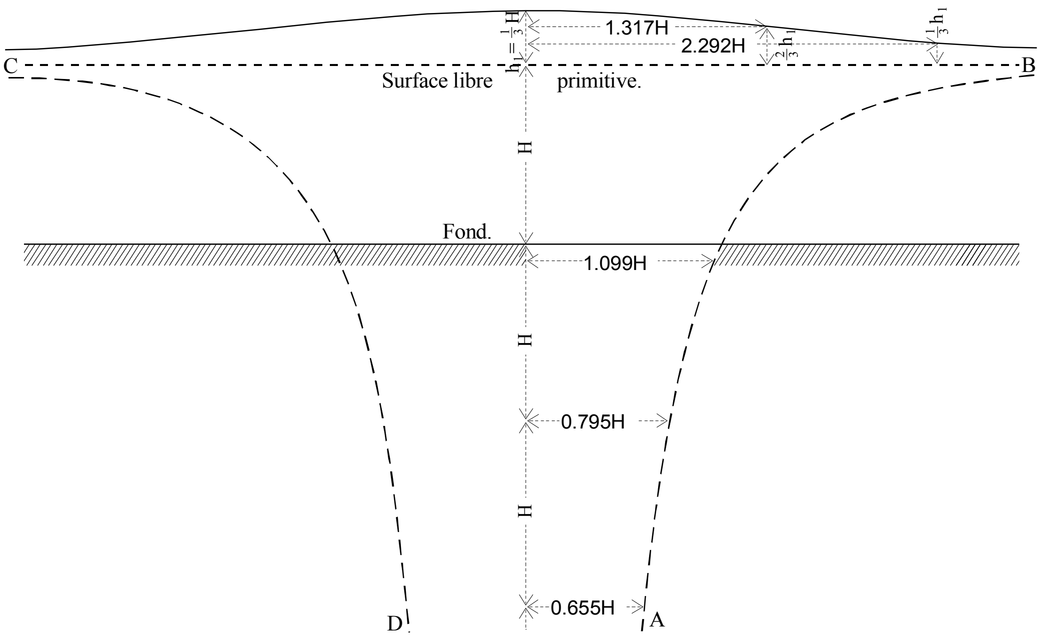


*Abbildung 2.8:*
*BOUSSINESQs Zeichung des Profils der solitären Welle mit der Wellenhöhe h = 1/3 H nach der der Gleichung (2.20) entsprechenden Gleichung*

$$e^{\sqrt{\frac{3h}{H^3}}\,x} = \pm\left(\frac{h}{\eta}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{4\left(\frac{h}{\eta}-\frac{1}{2}\right)^2-1}\ .$$

*Die beiden heruntergehenden Äste entstehen für h < 0. Aus [Boussinesq 1872].*

Mit BOUSSINESQs Arbeiten war nun der Streit um die Existenz und den Charakter der solitären Wasserwelle entschieden, und zwar vollständig zu Gunsten RUSSELLs. BOUSSINESQ hatte RUSSELLs Resultate bestätigt und die solitäre Welle in einigen Punkten noch genauer charakterisieren können. Neben Form, Geschwindigkeit und Stabilität hatte er noch Energie, Volumen und die Schwerpunktslage der Welle berechnen können sowie die Bewegung, die sie auf die einzelnen Wassermoleküle überträgt. Ferner konnte BOUSSINESQ zeigen, daß eine negative solitäre Welle das Bestreben hatte, weitere Wellen an ihrem Ende auszubilden. Daher würde sie - wie RUSSELL schon betont hätte - oszillatorische Wellen hinter sich herziehen. Lediglich auf Kollisionseigenschaften ging BOUSSINESQ nicht ein, da er nur eine einzige Welle betrachtet hatte und niemals mehrere.

In Frankreich wurden BOUSSINESQs Untersuchungen zu Wellen mit großem Interesse aufgenommen. Es ist sein "Essai sur la théorie des eaux courantes" [Boussinesq 1877], der zuerst Beachtung fand und dessen Ergebnisse auch übernommen wurden. So etwa in einem Aufsatz von FLAMANT [Flamant 1889], der es sich zur Aufgabe gemacht hatte, die Kapitel zur solitären

Welle aus BOUSSINESQs "Essai" zu einer eigenständigen und einfacher zu verstehenden Arbeit zusammenzufassen. Ebenso ADHÉMAR JEAN-CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT (1797 - 1886), der 1885 BOUSSINESQs "Essai" zitierte und versuchte, die Bewegungen der Moleküle an der Wasseroberfläche beim Durchgang einer solitären Welle zu präzisieren [St.-Venant 1885]. Diese Abhandlung hätte eine Abschrift von [Boussinesq 1871a] sein können. Noch zwei Jahre vor BOUSSINESQs recht umfassender Arbeit zur solitären Welle [Boussinesq 1872] hatte SAINT-VENANT eine eigene Behandlung der solitären Welle in Angriff genommen [St.-Venant 1870] und kam auf einer ganz eigenen, eher intuitiven als mathematischen Art auf $c^2 = g(H+3/2h)$. Der Unterschied der Ansätze dieser beiden Arbeiten von SAINT-VENANT [St.-Venant 1870, 1885] ist frappierend. Es kann der Eindruck aufkommen, daß SAINT-VENANT von BOUSSINESQs Mathematik so angetan war, daß er sie sich in seiner zweiten Arbeit zu eigen gemacht und ganze Passagen übernommen hatte. Es ist davon auszugehen, daß weder SAINT-VENANT noch FLAMMANT die Arbeit [Boussinesq 1872] kannten (eine an sich eher verwunderliche Tatsache). Sie hätten sich sonst vermutlich nicht die Mühe gemacht, die gleichen Ergebnisse noch einmal aufzuschreiben. Denn weder ist FLAMMANTs Aufsatz kürzer und verständlicher, noch ist ST. VENANTs Arbeit vollständiger als BOUSSINESQs [Boussinesq 1872].

Im übrigen Europa fanden BOUSSINESQs ausgezeichneten Arbeiten über solitäre Wellen wenig Beachtung. Vor allem in Großbritannien, wo besonderes Interesse an der praktischen Nutzung des Wissens über Wellen bestand, hatte die gefühlsmäßige Abneigung der britischen Mathematiker gegen die bei den Franzosen viel stärker ausgeprägte Abstraktion den Austausch mit französischen Naturwissenschaftlern nicht unerheblich behindert [Cros., Smith 1978]. Obwohl BOUSSINESQ seine Arbeiten sowohl in den "Comptes Rendus" wie auch in LIOUVILLEs "Journal de Mathematique" veröffentlicht hatte, den beiden bedeutendsten französischen Zeitschriften für mathematische und angrenzende Gebiete zu jener Zeit, schien man in Großbritannien lange keine Notiz von ihnen genommen zu haben. KORTEWEG und DE VRIES bemerkten in ihrer heute bekannten Arbeit 1895, daß die Motivation zum Schreiben ihrer Arbeit auch von der mangelnden Beachtung der solitären Welle herrührte. Bedeutende britische Autoren wie HORACE LAMB und A. B. BASSET hätten in ihren großen Werken [Lamb 1879], [Basset] zu Wasserwellen nicht klargestellt, daß die solitäre Welle tatsächlich formstabil bleiben kann. Hätte man in Großbritannien BOUSSINESQs Arbeiten mehr Beachtung geschenkt, wäre die Arbeit von KORTEWEG und DE VRIES evtl. nicht entstanden und die Geschichte der Solitonentheorie hätte später einen anderen Verlauf genommen.

Auch JOHN WILLIAM STRUTT (1842-1919), der unter dem Namen Lord RAYLEIGH bekannt ist, waren BOUSSINESQs Arbeiten unbekannt, als er eigene Gedanken zur Russellschen solitären Welle entwickelte [Rayleigh 1876]. Wohl erst nachdem RAYLEIGH seine Abhandlung fertiggestellt hatte, stieß er auf die erste Arbeit BOUSSINESQs zur solitären Welle, wie eine Bemerkung von ihm am Ende seiner Arbeit belegt, nicht jedoch auf die späteren, weiterführenden Arbeiten:

> "I have lately seen a memoir by M. Boussinesq ([Boussinesq 1871a]) ..., in which is contained a theory of the solitary wave very similar to that of this paper. So far as our results are in common, the credit of priority belongs of course to M. Boussinesq."

RAYLEIGH entwickelte 1876 fast die gleichen Gedanken wie BOUSSINESQ in seiner ersten Arbeit zur solitären Welle. Sein Ansatz war, eine zeitlich formkonstante Welle in einem fließenden Gewässer zu untersuchen. Ist die Geschwindigkeit des fließenden Wassers so groß wie die Geschwindigkeit der Welle, so wird sie bei entgegengesetzten Geschwindigkeiten eine stehende Welle und die Zeitabhängigkeit entfällt. So gelangte RAYLEIGH auf einem ähnlichen

Wege wie BOUSSINESQ zu einer der Gleichung (2.13) entsprechenden Entwicklung[7]. Nur hatte er nicht $\varphi$ sondern die Stromfunktion $\psi$ in Potenzen von z entwickelt. Abgesehen von diesem Unterschied sind RAYLEIGHs grundlegende Gedanken ähnlich den Boussinesqschen. Und so gelangte er auch mittels der Bernoulli-Gleichung und einigen Näherungen zu

$$\eta_{xx} = \frac{3\eta}{2\,H^2 (H+h)} (2h - 3\eta)$$

(vgl. Gleichung (2.19) von BOUSSINESQ) und aus dieser Differentialgleichung zur Lösung

$$\pm x = \sqrt{\frac{H^2 (H+h)}{3h}} \ln\left( \frac{2h}{\eta} - 1 + 2\sqrt{\frac{h^2}{\eta^2} - \frac{h}{\eta}} \right).$$

Durch die Näherungen

$$(H+h) \rightarrow H \qquad \text{und} \qquad \left( \frac{h^2}{\eta^2} - \frac{h}{\eta} \right) \rightarrow \frac{h^2}{\eta^2}$$

erhält man BOUSSINESQs Ergebnisse (2.19) und (2.20). Ebenso wie BOUSSINESQ gelangte RAYLEIGH zu der Formel für die Geschwindigkeit $c^2 = g(H+h)$ der solitären Welle. RAYLEIGH ging auch auf AIRYs und STOKES Kommentare ein, die RUSSELLs Ergebnisse in Frage gestellt hatten. Unter Hinweis auf seine eigenen Ergebnisse konnte er nun RUSSELLs Ergebnisse auch im britischen Raum bestätigen.

Mit RAYLEIGHs Abhandlung fand die Diskussion um die Existenz der solitären Welle nun auch in Großbritannien einen Abschluß. RAYLEIGH war einer der bedeutendsten Naturwissenschaftler und Mathematiker jener Zeit in England, der auch im übrigen Großbritannien und Irland Anerkennung gefunden hatte, und seine Arbeit wurde beachtet. Auch sein Hinweis auf [Boussinesq 1871a] wurde weitergegeben. Es scheint jedoch, als ob RAYLEIGH einer der Wenigen jener Zeit gewesen sei, der einen Blick auf die mathematische Literatur jenseits des Kanals warf, denn außer seinem Hinweis wurde BOUSSINESQ in späteren Arbeiten anderer Autoren zur solitären Welle nicht wieder zitiert. Daher blieben der britischen Wissenschaft die von BOUSSINESQ erst ab 1872 erklärten Eigenschaften der solitären Welle verborgen, die damit ein in Großbritannien noch immer eigentlich unerklärtes Phänomen darstellte. Diesen Zustand beschrieb 1891 McCOWAN [McCowan 1891a, S. 47]:

> "... In 1876 Lord Rayleigh ([Rayleigh 1876]) gave another method of approximation leading to an equation for the surface similar to that of Boussinesq ([Boussinesq 1871a]) and the same velocity of propagation. These theories, however, give little further information regarding the wave, and I am not aware that anything further has been done. ... Though the possibility of the propagation of a solitary wave without alteration in form and with constant velocity along a straight canal of rectangular cross-section has not been established on

[7] Ein sehr ausführlicher Überblick mit Kommentaren über die mathematischen Schritte in der Abhandlung von RAYLEIGH [Rayleigh 1876] findet sich in [Bullough 1988]. In [Bull., Cau. 1980] wird in kurzen Stichworten auf die Arbeiten von RAYLEIGH, KORTEWEG und DE VRIES, sowie McCOWAN (s. u.) eingegangen.

theoretical grounds, yet a result of experiment is such to show that a method based on this assumption must lead at least to a highly approximate account of the motion."

McCowans Kritik an den Ausführungen von BOUSSINESQ und RAYLEIGH fußten auf seiner Annahme, daß die ausgeführten Näherungen nur grob den Eigenschaften der solitären Welle entsprachen, es also nur näherungsweise und nicht streng gezeigt war, daß die solitäre Welle als solche existieren konnte. McCowan versuchte der solitären Welle mit einem allgemeineren Ansatz als RAYLEIGH auf die Spur zu kommen, mit dem Ziel, präzisere Näherungen für Geschwindigkeit und Form der Welle zu bekommen und weitere Eigenschaften beschreiben zu können. Nachdem er wie STOKES zu einer allgemeineren Form der Geschwindigkeit der Welle (Gleichung (2.10)) gelangt war, kam er weiterführend je nach Näherung zu BOUSSINESQs und RAYLEIGHs Ergebnissen oder zu davon leicht abweichenden. Seine abschließende Erklärung, daß STOKES nicht zu den gleichen weiterführenden Lösungen gelangen konnte, weil seine Argumentation bei der Lösung der Laplace-Gleichung einen Fehler enthielte (s.o.), brachte ihm postwendend einen sehr scharfen Gegenkommentar von STOKES ein [Stokes 1891]. Diesen wiederum beantwortete McCOWAN prompt mit einer Richtigstellung [McCowan 1891b]. In späteren Arbeiten u.a. zu solitären Wellen korrigierte McCOWAN eine Bemerkung AIRYs über die Gezeitenwelle [McCowan 1892] und ging auf die Form der Wellen kurz von dem Brechen ein [McCowan 1894].

Ein Jahr später erschien die heute berühmte Abhandlung von DIETERIK JOHANNES KORTEWEG (1848-1941), einem Mathematikprofessor aus Amsterdam, und seinem ehemaligen Doktoranden GUSTAV DE VRIES[8] über lange Wellen in Kanälen, die die Fragen zur solitären Welle beantworten sollte [KdV 1895]. KORTEWEG hatte sich schon in seiner Doktorarbeit, als J. D. VAN DER WAALS erster Student, mit der Wellengeschwindigkeit in Flüssigkeiten beschäftigt [Korteweg 1878]. Im Jahre 1848 hatte HELMHOLTZ gezeigt, daß die Schallgeschwindigkeit in einer kompressiblen Flüssigkeit in einem Rohr von der Elastizität der Rohrwände abhing. In seiner Doktorarbeit lieferte KORTEWEG die dazugehörige Gleichung [Rouse, Ince 1957]. Sein Doktorand DE VRIES wiederum hatte das Thema der solitären Wellen in seiner Doktorarbeit behandelt [Vries 1894], die er am 1. Dezember 1894 an der Universität Amsterdam verteidigte [Kox 1995]. Auch in dieser Doktorarbeit findet sich die heute so gern und oft zitierte und von [SCM 1973] "wiederentdeckte" Geschichte von RUSSELL auf dem Pferd (siehe Fußnote 2, Kapitel 1), ferner eine Beschreibung von RUSSELLs Experimenten in seinem künstlichen Becken und dann eine Theorie der langen, unveränderlichen Wasserwellen, in der auch die KdV-Gleichung zu finden ist [Blij 1978]. Da DE VRIES Doktorarbeit in holländisch verfaßt war, wurde sie ins Englische übersetzt und mit KORTEWEG als Mitautor veröffentlicht [KdV 1895]. So erfuhr sie die Vorstellung in einer breiteren Öffentlichkeit. KORTEWEG und DE VRIES motivierten ihre Abhandlung mit der immer noch fortbestehenden Unsicherheit über die Existenz der formkonstanten solitären Welle [KdV 1895, S. 422]:

"In such excellent treatises on hydrodynamics as those of Lamb and Basset, we find that even when friction is neglected long waves in a rectangular canal must necessarily change their form as they advance, becoming steeper in front and less steep behind."

---

[8] Über Gustav de Vries weiß man wenig. Er wurde unter Dieterik Korteweg 1894 an der Universität Amsterdam promoviert und wurde dann Gymnasiallehrer erst in Alkmaar, dann in Haarlem. De Vries wurde 1892 Mitglied der Wiskundig Genootschap (Holländische Mathematische Gesellschaft). Zwei weitere Veröffentlichungen von De Vries zu Zyklonen sind bekannt [Vries 1896, 1897]. Es existiert noch ein Briefwechsel zwischen de Vries und Korteweg, der allerdings wenig aufschlußreich ist, da sie sich wohl zu Zeiten des Briefwechsels öfter sahen (und sich dann im Gespräch austauschten). [Blij 1978], [Kox 1995], [Vortrag von A. J. Kox, Universität Amsterdam, zur Eröffnung der int. Tagung "KdV 95" am 23.4.1995]

BASSET hatte die Theorie der solitären Welle knapp behandelt, war jedoch nicht explizit auf den scheinbaren Widerspruch zwischen der Airyschen Theorie langer Flachwasserwellen und der solitären Welle eingegangen [Miles 1981]. Da jedoch weder RAYLEIGH noch McCOWAN [McCowan 1891a] diesen Widerspruch gelöst hätten, wie KORTEWEG und DE VRIES bemerkten, sondern geneigt seien, die solitäre Welle nur als Näherung zu betrachten, sahen sie es als ihr Ziel, diese Frage endgültig zu klären. Aus diesem Beginn der Abhandlung von KORTEWEG und DE VRIES wird klar, daß beide Autoren die weiterführenden Arbeiten von BOUSSINESQ zur solitären Welle [Boussinesq 1871b, 1872, 1873, 1877] nicht gekannt hatten, als sie ihre Abhandlung schrieben. Denn BOUSSINESQ hatte die Frage bereits geklärt. Mehr noch: Die ersten zwei Kapitel ihrer so bekannt gewordenen Abhandlung hätten KORTEWEG und DE VRIES auf wenige Anmerkungen zu BOUSSINESQs Arbeiten reduzieren können, denn ihre Herleitung der von ihnen in dieser Form angegebenen KdV-Gleichung

$$\eta_t = \sqrt{gH}\left(\frac{\alpha}{H}\eta + \frac{3}{4}\frac{\eta^2}{H} + \frac{H^2}{6}\eta_{xx} - \frac{T}{2\rho g}\eta_{xx}\right)_x ,$$

mit $\alpha$ = Konstante und $T$ = Oberflächenspannung, ist im wesentlichen gleich der Herleitung der Boussinesq-Gleichung in [Boussinesq 1872] zusammen mit dem oben erwähnten weiterführenden Schritt zur KdV-Gleichung.

Die Frage liegt nahe, ob KORTEWEG und DE VRIES das Problem der solitären Wellen so gründlich untersucht hätten, wenn die Arbeiten von BOUSSINESQ allgemein bekannt gewesen wären. Denn dann hätten wohl nach 1873 nur noch wenige Fragen zu diesem Thema bestanden. Nun ist, - wie BULLOUGH bemerkte [Bullough 1988] - das Spektralproblem zur Lösung der Boussinesq-Gleichung ein Problem dritter Ordnung (oder eine 3x3 Matrix) und daher ist die Boussinesq-Gleichung mittels der inversen Streutheorie viel komplizierter zu lösen als die KdV-Gleichung, für die das Spektralproblem der Schrödinger-Gleichung genügt. Der bekannte Durchbruch der Solitonentheorie durch die Lösung der KdV-Gleichung mittels der inversen Streutheorie hätte wohl alleine mit der Boussinesq-Gleichung nicht so stattfinden können. Und damit hätte der Beginn der klassischen Geschichte der Solitonentheorie auf eine andere Weise stattfinden müssen als es ab etwa 1967 der Fall war. Die Geschichte der Solitonentheorie wäre anders verlaufen und dieses Gebiet hätte vielleicht heute eine andere Gestalt.

Die Arbeit von KORTEWEG und DE VRIES führt in einigen Punkten weiter als BOUSSINESQs. Eine bedeutende Erweiterung ist die Einführung einer neuen Lösung der KdV-Gleichung, auf die KORTEWEG und DE VRIES durch das Weglassen der Randbedingung $\eta = 0$ für $|x| \to \infty$ stießen:

$$\eta = h\,\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{\mathrm{h}}{4\sigma\,\mathrm{M}^2}}\,\mathrm{x} \quad . \tag{2.21}$$

Hier bezeichnet cn das Jacobische elliptische Integral mit dem Modul $M$ und $\sigma$ ist eine Integrationskonstante. Die Funktion cn geht für $M = 0$ in die Sinusfunktion über und für $M \to 1$ in die solitäre Welle der $\mathrm{sech}^2$-Form. Die Boussinesqsche Lösung (2.20) ist also ein Spezialfall der Lösung (2.21). Auf die Existenz solcher Lösungen hatte auch schon BOUSSINESQ hingewiesen [Boussinesq 1877], allerdings ohne sie explizit anzugeben [Miles 1981]. KORTEWEG und DE VRIES schlugen für diese Wellen die originelle Bezeichnung "cnoidale

Wellen" vor, in Anlehnung an die Bezeichnung "sinusoidale Wellen". Für die Konstante $\sigma$ gaben KORTEWEG und DE VRIES an:

$$\sigma = \frac{H^3}{3} - \frac{TH}{\rho g} \ ,$$

wobei mit $T$ die Oberflächenspannung des Wassers bezeichnet ist. Das Vorzeichen von $\sigma$ entspricht positiven bzw. negativen solitären Wellen. Für den Fall, daß $\sigma < 0$ (und $M \to 1$), was für Wasser von 20°C ab einer Wassertiefe $H$ unter 4,7 mm der Fall ist, wie KORTEWEG und DE VRIES zeigten, geht die Lösung (2.21) über in

$$\eta = -h \,\mathrm{sech}^2 \sqrt{\frac{\mathrm{h}}{-4\sigma}}\,\mathrm{x} \ ,$$

und diese negative solitäre Welle bleibt stabil. Somit war gezeigt, daß die negative solitäre Welle durch die Einführung der Oberflächenspannung stabil bleiben kann. Während BOUSSINESQ solitäre Wellen gleicher Energie und verschiedener Formen verglich und zu dem Ergebnis kam, daß die solitäre Welle der Form (2.20) die stabilste sei, verglichen KORTEWEG und DE VRIES solitäre Wellen verschiedener Energien und kamen zu dem Schluß, daß die Welle

$$\eta = h \,\mathrm{sech}^2 \sqrt{\frac{\mathrm{h_l}}{4\sigma}}\,\mathrm{x}$$

nur für den Fall $h = h_l$ unverändert ist. Bei $h > h_l$ werde die Welle vorne steiler und hinten flacher, bei $h < h_l$ vorne flacher und hinten steiler.

Es war KORTEWEGs und DE VRIES Absicht gewesen, mit ihrer Arbeit klarzustellen, daß die von BOUSSINESQ, RAYLEIGH und McCOWAN angegebene Form für die solitäre Welle keine Näherung darstellen muß, sondern eine exakte Lösung für dieses Problem sein kann und daß eine solitäre Welle nicht nur näherungsweise, sondern exakt formkonstant bleiben konnte. Dies galt allerdings nur für eine im Verhältnis zur Wassertiefe bestimmten Wellenhöhe $h_l$. Diese beabsichtigte Klärung scheint ihnen gelungen zu sein. In späteren Abhandlungen zu Wasserwellen wird die Möglichkeit der Existenz der solitären Welle wohl hin und wieder verschwiegen (s.u.) aber nicht mehr geleugnet. Was die nun gut 50 Jahre währende Diskussion um die solitäre Welle allerdings angeht, hätte die Arbeit von KORTEWEG und DE VRIES - neben der Erklärung der negativen Welle und der einzig möglichen Amplitude $h_l$ einer stabilen Welle - auch für Verwirrung sorgen können. Denn die in der Diskussion so wichtige Geschwindigkeit für die solitäre Welle gaben sie an mit

$$c = \sqrt{gH}\left[1 + \frac{h}{M^2 H}\left(\frac{1}{2} - \frac{E(M^2)}{K(M^2)}\right)\right]$$

(mit $E$, $K$: vollständige elliptische Integrale zweiter und erster Ordnung), was auch im Falle der solitären Welle

$$c = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{h}{2H}\right)$$

nicht mit der bekannten und mittlerweise oft bestätigten Geschwindigkeit $c^2 = g(H+h)$ übereinstimmt. KORTEWEG und DE VRIES hatten jedoch implizit die Geschwindigkeit der solitären Welle so definiert, daß der mittlere horizontale Impuls (über eine Wellenlänge) im bewegten Koordinatensystem ($t$, $X = ct - x$) verschwinden sollte [Miles 1981]. Auf diesen diskutierbaren Punkt ihrer Arbeit gingen sie nicht weiter ein.

Die Arbeit von KORTEWEG und DE VRIES als die abschließend klärende Arbeit in der Diskussion um die solitäre Welle zu bezeichnen, ist sicherlich nicht ganz gerechtfertigt. Dafür war auch schon vor 1895 zu viel geklärt. Das Problem war in Frankreich, wie es scheint, schon mit den Arbeiten von BOUSSINESQ und sich anschließenden Arbeiten als gelöst betrachtet worden, denn es sind dort zu diesem Thema keine weiteren Diskussionen zu finden. In Großbritannien hatten RAYLEIGH und McCOWAN die Frage schon so weit zu Gunsten RUSSELLs geklärt, daß es höchstens noch der Erklärung von Details bedurfte, um auch dort das Thema abzuschließen. Ihre große Bedeutung hat die Arbeit [KdV 1895] erst in der heutigen Zeit mit ihrer "Wiederentdeckung" durch GARDNER und MORIKAWA [Gar., Mor. 1960] bzw. ZABUSKY und KRUSKAL [Zab., Kru. 1965] erhalten; hauptsächlich durch die entscheidende Rolle der KdV-Gleichung bei der Etablierung der Solitonentheorie. Diese Rolle hat sie direkt nach ihrem Erscheinen noch nicht gespielt. Eine Biographie über KORTEWEG [Beth, Wou. 1946] geht weder auf seine Arbeiten zu Wasserwellen ein, noch erwähnt sie die heute so bekannte Arbeit von 1895! Was von ihr aufgegriffen wurde, waren in erster Linie die cnoidalen Wellen und nicht die KdV-Gleichung, die schon von KORTEWEG und DE VRIES als "very important equation" bezeichnet wurde. In den Standardwerken zur Hydraulik [Lamb 1932], [Stoker 1957] und [Weh., Lai 1960] fand die KdV-Gleichung keine Erwähnung, jedoch wurden die cnoidalen Wellen z.T. ausführlich behandelt [Miles 1981]. Durch die große Bedeutung, die die KdV-Gleichung heute durch die Solitonentheorie erhalten hat, ist sie auch in das Zentrum der historischen Betrachtungen zur Solitonentheorie gelangt. Kaum eine historische Abhandlung oder Einleitung eines Lehrbuches geht nicht auf die Entdeckung der KdV-Gleichung 1895 ein. Anders steht es mit den Arbeiten BOUSSINESQs zu Wellen. Während ihnen in der Geschichte der Solitonentheorie des letzten Jahrhunderts große objektive Bedeutung zukommt, sind sie in der Sekundärliteratur zur Geschichte der Solitonentheorie bisher kaum besprochen. Lediglich [Miles 1981] geht ausführlicher auf die Arbeiten BOUSSINESQs zur solitären Welle ein. Interessanterweise wird, wenn BOUSSINESQ heute erwähnt wird, meist immer noch seine im Vergleich zu späteren Arbeiten recht unbedeutende Arbeit [Boussinesq 1871a] zitiert, in der die Boussinesq-Gleichung nicht vorkommt. Hier scheint RAYLEIGHs vielzitierte Abhandlung [Rayleigh 1876] bis in die heutige Zeit zu wirken, denn er war es, der nur [Boussinesq 1871a] gekannt, zitiert und damit bekannt gemacht hatte.

Während die KdV-Gleichung selbst in den Jahrzehnten nach ihrer expliziten Entdeckung durch KORTEWEG und DE VRIES keine Beachtung fand, waren Flachwasserwellen und insbesondere die cnoidalen Wellen mit und ohne Berücksichtigung der Oberflächenspannung auch in den folgenden Jahrzehnten bis in die Gegenwart hinein Gegenstand mancher Untersuchungen. In diesem Zusammenhang wurde die Arbeit [KdV 1895] auch hin und wieder zitiert wie eine Übersicht in [Blij 1978] zeigt: In [Lamb 1906] findet sich ein Hinweis auf die Arbeit, und auch in einem Übersichtsartikel in der Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften [Love 1911] wird auf cnoidale Wellen eingegangen, mit einem Hinweis auf [KdV 1895]. Auf dem ersten Internationalen Kongress für Angewandte Mechanik 1924 in Delft behandelte LEVI-CIVITA permanente Schwerewellen [Levi-C. 1925] und es folgten [Dubreil 1924], [Struik 1926], [Kármán 1940], [Keller 1948] und weitere. Aus mathematischer Sicht war ferner die Frage nach den Existenzbeweisen solitärer Wellen interessant und es wurde bewiesen, daß die Eulergleichungen solitäre Wellenlösungen aller Amplituden zulassen. Bemerkungen zu verschiedenen Existenzbeweisen permanenter Schwerewellen findet sich in dem Übersichtswerk [Zeidler 1971]. Aus der Sicht der Mechanik und Ingenieurwissenschaften stand die praktische Anwendung im Vordergrund. Auf diesem Gebiet lieferte [Stoker 1957] eine detaillierte Übersicht.